ЛИШНІЯ НЕИЗВѢСТНЫЯ

ВЪ

СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКѢ.

РАСЧЕТЪ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДѢЛИМЫХЪ СИСТЕМЪ.

В. Л. Кирпичева

заслуженнаго профессора Кіевскаго Политехническаго Института

ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА II.

КІЕВЪ.

Типографія С. В. Кульженко, Пушкинская улица, соб. д. № 4.

1903.

Печатать разрѣшаетъ. Кіевъ, 17 Января 1903 года.
И. д. Директора Кіевскаго Политехническаго Института ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА II-го. *М. Коноваловъ.*

Предисловіе.

Эта книга была написана какъ пособіе для лекцій, которыя я предполагалъ читать на инженерномъ отдѣленіи Кіевскаго Политехническаго Института. Вопросъ, которому она посвящена, неоднократно разсматривался и излагался. При изслѣдованіи его, смотря по направленію и симпатіямъ авторовъ, отдавалось преимущество одной изъ слѣдующихъ возможныхъ точекъ зрѣнія: a) математической; b) механической; c) конструктивной. Я излагаю его главнымъ образомъ съ точки зрѣнія механики; стараюсь выяснить значеніе теоремъ, примѣняемыхъ при нахожденіи лишнихъ неизвѣстныхъ и показать связь ихъ съ общими законами Механики.

Изложеніе я веду все время въ самомъ общемъ видѣ, и получаемыя теоремы примѣнимы ко всѣмъ случаямъ упругихъ тѣлъ и системъ. Для возможности такого общаго изложенія, я примѣняю обобщенныя координаты и обобщенныя силы Лагранжа. Думаю, что при такой постановкѣ вопроса вполнѣ устраняются сомнѣнія и недоразумѣнія, иногда возникавшія при изслѣдованіяхъ въ этой области Строительной Механики. Только при совершенно общемъ разсмотрѣніи вопросы эти становятся простыми и понятными.

Для поясненія общей теоріи, я привожу примѣры, выбирая наиболѣе простые, чтобы избѣжать обилія подробностей и постороннихъ соображеній, а также чтобы устранить такіе выводы, продолжительность которыхъ заслоняетъ связь излагаемаго частнаго случая съ общей теоріей. Примѣры эти имѣютъ исключительно значеніе иллюстрацій къ общимъ выводамъ. Иногда я намѣренно веду выводъ приблизительно, чтобы не затемнять длинными выкладками теченіе основной идеи. Напримѣръ не примѣняю такъ называемую точную теорію изгиба кривыхъ тѣлъ, а пользуюсь простѣйшимъ, первоначальнымъ приближеніемъ.

Я ограничиваюсь общей теоріей и не ввелъ въ планъ этого сочиненія подробный разборъ главнѣйшихъ, употребительныхъ въ строительномъ дѣлѣ конструкцій. Онѣ много разъ были разбираемы и этому вопросу посвящено значительное число сочиненій на русскомъ и иностранномъ языкахъ.

Я намѣренно по возможности избѣгаю такъ называемаго указательнаго (suggestive) обозначенія, т. е. примѣненія въ формулахъ такихъ символовъ, которые сами, своимъ видомъ, указываютъ, что именно они обозначаютъ. Такое обозначеніе сложно; оно вызываетъ примѣненіе буквъ съ двойными подстрочными знаками, а иногда и болѣе сложныхъ символовъ, при которыхъ одинъ коеффиціентъ означается четырьмя буквами, напр.

$$(xxyy).$$

Введеніе такихъ обозначеній затрудняетъ писаніе и чтеніе, и они рѣдко достигаютъ своей цѣли, т. е. яснаго указанія на значеніе того или другаго коеффиціента. Поэтому многіе англійскіе писатели по Теоріи Упругости отказываются отъ подобныхъ символовъ. Такъ поступаютъ авторы Treatise on Natural Philosophy, а за ними и Ловъ, называющій указательное обозначеніе неуклюжимъ (clumsy). Мнѣ не приходилось примѣнять обозначеніе такого характера еще и потому, что приводимыя мною формулы очень просты.

При составленіи этой книги мнѣ всего больше принесли пользы слѣдующіе два классическія сочиненія:

Lord Kelvin (William Thomson) and P. G. Tait. Treatise on Natural Philosophy.

Lord Rayleigh. Theory of Sound.

Изъ обѣихъ этихъ книгъ я многое позаимствовалъ. Также много взято у Мюллера Бреслау (Die neueren Methoden der Fèstigkeitslehre и Графическая Статика сооруженій [1]).

С. Блазіенъ.
Августъ 1902.

[1]) Всѣ чертежи для этой книги исполнены г. студентомъ Войничъ-Сяноженцкимъ, которому считаю долгомъ принести мою искреннюю благодарность.

Оглавленіе.

ГЛАВА I.

Примѣры конструкцій съ лишними неизвѣстными.

ГЛАВА II.

Методъ рѣшенія.

ГЛАВА III.

Способъ Мора.

ГЛАВА VI.

Теорема взаимности.

ГЛАВА V.

Сравненіе рѣшеній, получающихся по способу Мора, съ рѣшеніями, которыя даетъ теорема взаимности.

ГЛАВА VI.

Теорема Кастиліано.

ГЛАВА VII.

Начало наименьшей работы.

ГЛАВА VIII.

Вліяніе перемѣщенія опоръ.

ГЛАВА IX.

Вліяніе температуры.

ГЛАВА X.

Заключительныя замѣчанія.

ПРИЛОЖЕНІЕ I.

ПРИЛОЖЕНІЕ II.

ВСТУПЛЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Примѣры конструкцій съ лишними неизвѣстными.

1. Извѣстно, что всѣ различныя конструкціи, системы или фермы, примѣняемыя въ строительномъ дѣлѣ и въ машинахъ, для уравновѣшенія нагрузокъ [1]), раздѣляются на два класса: a) *системы статически опредѣлимыя*; b) *системы неопредѣлимыя статически*. Это раздѣленіе основано не на внѣшнемъ видѣ системъ, а на способахъ ихъ математическаго расчета; за основаніе дѣленія приняты тѣ пріемы, которые должны быть примѣняемы для нахожденія реакцій опоръ и внутреннихъ напряженій, появляющихся въ частяхъ фермы подъ дѣйствіемъ нагрузокъ.

2. Системы перваго класса—статически опредѣлимыя—могутъ быть расчитаны при исключительномъ пользованіи законами Статики неизмѣняемаго тѣла. Для опредѣленія реакцій опоръ и вычисленія напряженій частей этихъ системъ, не требуется знать ихъ упругія свойства, и не нужно даже знать поперечные размѣры этихъ частей. Достаточенъ геометрическій чертежъ, скелетъ фермы. Онъ даетъ возможность сначала найти реакціи опоръ, потомъ опредѣлить всѣ силы, проявляющіяся въ фермѣ. Когда эти силы найдены, то затѣмъ можно приступить къ опредѣленію прочныхъ размѣровъ. Эти двѣ операціи: 1) опредѣленіе силъ, проявляющихся въ фермѣ и ея опорахъ, и 2) опредѣленіе прочныхъ размѣровъ,—совершенно раздѣлены одна отъ другой [2]).

---

[1]) Я употребляю слово *нагрузка* для обозначенія внѣшнихъ силъ, а терминъ—*напряженіе*—для внутреннихъ силъ.

[2]) Обыкновенно въ статически опредѣлимыхъ системахъ также вполнѣ раздѣляется рѣшеніе двухъ вопросовъ: a) разысканіе реакцій опоръ, b) опредѣленіе напряженій въ частяхъ фермы. Но это не всегда; бываютъ частые случаи, статически опредѣлимыхъ системъ, въ которыхъ нельзя отдѣлить нахожденіе реакцій опоръ отъ отдѣленія напряженій частей фермы, и тогда эти два вопроса должны быть рѣшаемы одновременно. См. дальше n°n° 15—16.

Иначе обстоитъ дѣло для *системъ втораго класса*. Въ нихъ число неизвѣстныхъ силъ (реакцій опоръ и напряженій частей) превышаетъ число уравненій, которыя можетъ дать Статика неизмѣняемой системы, а потому, если мы пользуемся исключительно законами этого отдѣла механики, то получимъ неопредѣленное рѣшеніе. Отсюда произошло названіе: статически неопредѣлимыя системы. Если число неизвѣстныхъ силъ на n единицъ превышаетъ число уравненій, даваемыхъ Статикой, то мы говоримъ, что здѣсь имѣется n *лишнихъ неизвѣстныхъ*. Онѣ должны быть найдены нѣкоторыми особыми пріемами, и когда величины ихъ опредѣлены, то Статика неизмѣняемой системы входитъ въ свои права и даетъ средства для нахожденія остальныхъ неизвѣстныхъ.

Для опредѣленія лишнихъ неизвѣстныхъ недостаточно имѣть геометрическій чертежъ фермы, а необходимо знать упругія свойства всѣхъ ея частей, ихъ поперечные размѣры и матеріалъ, изъ котораго сдѣланы эти части. Т. е. для расчета необходимо имѣть полный конструктивный чертежъ фермы. Разсматривая измѣненія формы, получающіяся въ частяхъ фермы, мы получимъ дополнительныя уравненія, необходимыя для нахожденія лишнихъ неизвѣстныхъ. Найдя ихъ, можемъ провѣрить достаточны-ли для прочности размѣры частей фермы. Если они окажутся малы, то нужно ихъ увеличить, снова продѣлать опредѣленіе силъ, дѣйствующихъ въ фермѣ, и опять провѣрить: будутъ-ли удовлетворены условія прочности?

Такимъ образомъ для расчета системъ втораго класса необходимо пользовать законами двухъ отдѣловъ механики: Статики неизмѣняемой системы, и ученія объ упругости. При этомъ расчетѣ тѣсно связаны и переплетены между собою три операціи: 1) опредѣленіе реакцій опоръ; 2) опредѣленіе силъ, дѣйствующихъ въ фермѣ и 3) опредѣленіе прочныхъ размѣровъ.

3. Примѣры системъ съ лишними неизвѣстными. Первый примѣръ: лишнія реакціи опоръ для случая плоскихъ фермъ. Опоры съ которыми соединяются такія фермы могутъ быть трехъ родовъ, смотря потому насколько онѣ стѣсняютъ свободу движенія фермы, относительно опоры. Наименьшее стѣсненіе представляется въ томъ случаѣ, когда одна точка фермы, опираясь на опору, можетъ свободно скользить по поверхности ея. Здѣсь стѣснено только движеніе перпендикулярное къ поверхности опоры. Поэтому получается только одна реакція опоры, идущая по перпендикуляру къ ея поверхности. Это опоры перваго рода.

Затѣмъ идутъ опоры втораго рода, съ которыми одна точка фермы соединена неподвижно; здѣсь уничтожено всякое возможное въ плоскости движеніе соединяемой точки. Но всякое плоское движеніе можетъ быть замѣнено двумя взаимно перпендикулярными; слѣдовательно можно считать, что здѣсь появляются двѣ реакціи опоры, по двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ. Такія опоры мы будемъ называть *пятками*.

Наконецъ примѣняется еще слѣдующее соединеніе съ опорами: кромѣ того, что одна точка фермы дѣлается неподвижной, производятъ здѣсь еще *закрѣпленіе*, т. е. препятствуютъ поворачиванію фермы въ этомъ мѣстѣ. Для этого нужно приложить пару силъ, препятствующую такому поворачиванію. И такъ здѣсь вводится препятствіе тремъ движеніямъ: двумъ перемѣщеніямъ точки закрѣпленія, по двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, и одному вращенію нѣкоторой линіи. Вслѣдствіе этого получаются три реакціи: двѣ силы и одна пара. Такія закрѣпляющія опоры мы будемъ называть опорами третьяго рода.

Положимъ имѣемъ въ данной системѣ слѣдующія опоры: число опоръ перваго рода есть m, число опоръ втораго рода есть n, и число опоръ третьяго рода есть p. Тогда общее число неизвѣстныхъ реакцій опоръ представится суммою.

$$S = m + 2n + 3p.$$

Но, въ случаѣ силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости, Статика неизмѣняемой системы даетъ три уравненія, необходимыя и достаточныя для равновѣсія; слѣдовательно разность

$$S - 3 = m + 2n + 3p - 3$$

представить число лишнихъ реакцій опоръ.

Такимъ образомъ случай фиг. (1), гдѣ одна реакція перваго рода и одна реакція втораго рода, представляетъ систему статически опредѣлимую. Для фиг. 2 (двѣ опоры перваго рода и одна—втораго рода) имѣемъ одну лишнюю реакцію опоры. Для фиг. 3 (арка съ двумя шарнерными пятами) имѣемъ также одну лишнюю реакцію. Для фиг. 4 (арка съ друмя закрѣпленными концами) получаются шесть реакцій опоръ, слѣдовательно три лишнія неизвѣстныя. На фиг. 5, представлена непрерывная балка имѣющая 4 опоры перваго рода и одну втораго; здѣсь три лишнія неизвѣстныя. Непрерывная арочная ферма (фиг. 6) представляетъ 4 лишнія неизвѣстныя.

4. Второй примѣръ. Плоскія фермы и балки съ висячими опорами. Иногда ферма дѣлается не цѣльной, а состоитъ изъ нѣсколькихъ частей по длинѣ, соединенныхъ шарнерами. Такимъ образомъ отдѣльныя части фермы поддерживаются частію неподвижными опорами, частію указанными шарнерами, которые мы называемъ висячими опорами. Въ каждой висячей опорѣ получаются двѣ реакціи, вводя которыя, мы можемъ разсматривать отдѣльно равновѣсіе каждой части фермы, и для каждой изъ нихъ получимъ три уравненія равновѣсія.

Обозначимъ по прежнему число неподвижныхъ опоръ перваго, втораго и третьяго родовъ, черезъ

$$m,\ n,\ p.$$

Пусть, кромѣ того, наша ферма имѣетъ висячія опоры, числомъ

$$q.$$

При такомъ числѣ опоръ получается слѣдующее число неизвѣстныхъ реакцій:

$$m + 2n + 3p + 2q.$$

Но если висячихъ опоръ q, то ферма состоитъ изъ $q+1$ отдѣльныхъ частей, и для каждой изъ нихъ получаемъ три уравненія равновѣсія, а всего:

$$3\ (q + 1)$$

уравненій. Вычитая это выраженіе изъ числа неизвѣстныхъ реакцій получимъ число лишнихъ неизвѣстныхъ:

$$m + 2n + 3p - q - 3.$$

Такъ напр. для трехшарнерной арки (фиг. 7) имѣемъ:

$$m = o,\quad n = 2,\quad p = o,\quad q = 1$$

$$m + 2n + 3p - q - 3 = o$$

слѣд. это система статически опредѣлимая. Система, представленная на фиг. 8, и система фирмы Батиньоль (фиг. 8-bis) также не представляютъ лишнихъ реакцій.

5. Третій примѣръ. Пространственныя фермы. Для этого случая будемъ различать три рода опоръ. Можно вполнѣ уничтожить подвижность опираемой точки, т. е. устранить возможность всякаго движенія ея. Но произвольное движеніе точки замѣняется тремя движеніями по тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ; слѣд. здѣсь уничтожаются три различныхъ движенія, а для этого нужны три реакціи, по направленію трехъ осей. Это будетъ опора перваго рода.

При опорахъ втораго рода сохраняется нѣкоторая подвижность опираемой точки; ей позволяется двигаться по заданной прямой и уничтожаются всякія движенія перпендикулярныя къ этой прямой. Здѣсь получаются двѣ реакціи опоры.

Наконецъ при опорѣ третьяго рода оставляется для опираемой точки свобода перемѣщаться по нѣкоторой плоскости и уничтожается перемѣщеніе къ этой плоскости перпендикулярное. Здѣсь имѣется только одна реакція, по перпендикуляру къ плоскости.

Оставимъ въ сторонѣ другія случаи, когда, кромѣ уничтоженія всѣхъ, или нѣкоторыхъ, движеній точки, еще производятъ *закрѣпленіе*, т. е. препятствуютъ поворачиванію нѣкоторыхъ линій. Будемъ разсматривать случаи, когда имѣются только опоры указанныхъ трехъ родовъ, и назовемъ число опоръ перваго, втораго и третьяго родовъ черезъ

$$m,\ n,\ p.$$

Тогда число неизвѣстныхъ реакцій будетъ:

$$S = 3m + 2n + p.$$

Но Статика неизмѣняемой системы даетъ, въ общемъ случаѣ, *шесть* необходимыхъ и достаточныхъ условій равновѣсія. Слѣд. вычитая изъ S число 6, получимъ число лишнихъ реакцій:

$$S - 6 = 3m + 2n + p - 6.$$

6. Такъ напр. для случая

$$m = n = p = 1$$

получаемъ

$$S - 6 = o$$

т. е. система будетъ статически опредѣлимая. Этотъ частный случай представляетъ простѣйшій пріемъ для приданія тѣлу неподвижности. Здѣсь опираютъ три точки тѣла; для одной изъ нихъ достигаютъ полной неподвижности; вторая точка ставится въ направляющій прямолинейный желобокъ, и можетъ перемѣщаться по его направленію; наконецъ третья опирается на плоскость, и можетъ скользить по ней въ любомъ направленіи.

Такой пріемъ сообщенія тѣлу неподвижности иногда примѣняется въ строительномъ дѣлѣ. Его же предложилъ В. Томсонъ для установки физическихъ инструментовъ, и такая система теперь часто примѣняется для этой цѣли. Одна ножка инструмента кончается конусомъ или пирамидой, входящими въ соотвѣтствующее углубленіе опорной плоскости. Другая имѣетъ видъ призмы, ходящей по призматическому желобку; третья есть остріе, опирающееся на плоскость. Такова система установки, названная В. Томсономъ «plane, slot and hole» (плоскость, желобокъ и дыра).

Примѣняя ее достигаемъ того, что инструментъ всегда ставится въ одно и тоже совершенно опредѣленное положеніе, сколько бы разъ его ни снимали.

7. Какъ примѣръ пространственной фермы съ лишними реакціями, возьмемъ куполъ, опирающійся на плоскость k точками, и пусть всѣ эти опоры будутъ вполнѣ неподвижны, т. е. для каждой получается 3 реакціи. Здѣсь число лишнихъ реакцій будетъ

$$3k - 6.$$

Другимъ примѣромъ возьмемъ обыкновенную мостовую ферму, опирающуюся на каждый изъ береговыхъ устоевъ двумя точками. Пусть на одномъ устоѣ опорныя точки совершенно неподвижны, а на другомъ устоѣ эти точки могутъ перемѣщаться по прямымъ параллельнымъ оси фермы. Тогда

$$m = 2, \quad n = 2, \quad p = o$$

$$S - 6 = 4$$

т. е. четыре лишнія неизвѣстныя реакціи.

8. Четвертый примѣръ. Лишніе бруски плоскихъ фермъ. Будемъ разсматривать плоскія фермы, въ которыхъ вовсе нѣтъ изгиба, а навѣрное всѣ части ихъ растянуты и сжаты. Какъ извѣстно такое устраненіе изгиба можетъ быть достигнуто устройствомъ шарнерныхъ соединеній, и тѣмъ, что всѣ нагрузки прикладываются только въ узлахъ фермы, гдѣ отдѣльные бруски соединяются между собою своими концами. Но и въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ не шарнерные, а жесткіе узлы, разсмотрѣніе такой идеальной системы, въ которой изгибъ вполнѣ устраненъ, очень полезно какъ первое приближеніе, указывающее на общій характеръ явленія. Во многихъ случаяхъ даже можно ограничиться этимъ первымъ приближеніемъ, и считать, что оно рѣшаетъ вопросъ съ достаточной для практики точностью.

Посмотримъ при какихъ условіяхъ будетъ статически опредѣлима эта система, т. е. когда будетъ возможно опредѣлить напряженія всѣхъ брусковъ исключительно помощію законовъ равновѣсія. При этомъ считаемъ, что всѣ реакціи опоръ уже найдены.

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ самымъ общимъ образомъ, нужно примѣнить Статику въ самомъ общемъ ея видѣ, т. е. въ формѣ начала возможныхъ перемѣщеній, включающаго въ себя всѣ другіе законы равновѣсія. По началу возможныхъ перемѣщеній сумма работъ всѣхъ силъ, внѣшнихъ и внутреннихъ, для каждаго возможнаго перемѣщенія системы должна быть равна нулю. Это начало даетъ столько различныхъ уравненій сколько различныхъ возможныхъ перемѣщеній можетъ имѣть система. Такое же число неизвѣстныхъ можетъ быть опредѣлено изъ этихъ уравненій.

Опредѣляя напряженія брусковъ фермы, мы не можемъ пользоваться тѣми возможными перемѣщеніями, при которыхъ фигура фермы остается неизмѣнной, и которые примѣняются для разысканія реакцій опоръ. Дѣйствительно, напряженія, какъ внутреннія силы, не противятся означеннымъ перемѣщеніямъ, даютъ для нихъ работу равную нулю, и потому исключаются изъ соотвѣтствующихъ уравненій. Для нахожденія напряженій остаются только тѣ возможныя движенія системы, при которыхъ *измѣняется* ея форма. При каждомъ возможномъ измѣненіи формы, одинъ изъ брусковъ долженъ растягиваться или сжиматься, и своимъ сопротивленіемъ препятствовать такому измѣненію. Если-бы это условіе не было выполнено, то система не могла-бы уравновѣшивать нѣкоторыя изъ нагрузокъ. Если оно выполнено, то начало возможныхъ перемѣщеній даетъ уравненіе, въ которое входитъ напряженіе одного изъ брусковъ, опредѣляемое этимъ уравненіемъ.

Изъ сказаннаго видно, что условіе статической опредѣлимости приводится къ слѣдующему. Во первыхъ ферма должна быть жесткая, т. е., такая, что, при неизмѣнности длинъ ея брусковъ, фигура фермы не можетъ измѣняться. Во вторыхъ она должна быть такъ составлена, чтобы возможно было измѣнять длину каждаго изъ брусковъ, не измѣняя длинъ остальныхъ. Всякое сложное измѣненіе фигуры фермы тогда можетъ быть разсматриваемо, какъ состоящее изъ нѣсколькихъ простыхъ, при каждомъ изъ которыхъ измѣняется длина только одного бруска. Эти простыя измѣненія всѣ различны между собою и каждое изъ нихъ не можетъ замѣниться совокупностью нѣсколькихъ другихъ. Это *неприводимыя* возможныя перемѣщенія, независящія одно отъ другаго. Число ихъ опредѣляетъ число уравненій, которое даетъ начало возможныхъ перемѣщеній.

При этихъ условіяхъ для каждаго бруска получается особое возможное перемѣщеніе фермы, и слѣд. особое уравненіе равновѣсія, изъ котораго и найдемъ натяженіе этого бруска. Если же въ жесткой фермѣ, при измѣненіи длины одного изъ брусковъ, неизбѣжно удлиняются или сжимаются еще нѣсколько другихъ брусковъ, то эти бруски будутъ лишніе.

Однимъ словомъ статически опредѣлимая система должна содержать въ себѣ только такіе бруски, которые совершенно необходимы для приданія ей жесткости. Всѣ остальные бруски будутъ лишніе, и напряженія ихъ представятъ лишнія неизвѣстныя.

9. Это условіе неизмѣнности формы опредѣляетъ число необходимыхъ брусковъ $Б$, когда дано число узловъ фермы $У$. Простѣйшія жесткія фермы получаются изъ треугольниковъ, соединяемыхъ послѣдовательно одинъ съ другимъ общей стороной (фиг. 9). Первый изъ этихъ треугольниковъ даетъ три узла и требуетъ трехъ брусковъ. Всякій слѣдующій затѣмъ треугольникъ образуетъ одинъ новый узелъ, и требуетъ для этого двухъ новыхъ брусковъ. По этому мы получаемъ условіе:

$$(Б - 3) = 2\ (У - 3)$$

или

$$Б = 2\ У - 3$$ [1]).

Такое же отношеніе между числомъ брусковъ и числомъ узловъ получится и для всякой другой жесткой системы, образованной способомъ отличнымъ отъ предыдущаго. Напр. можно принять слѣдующій способъ образованія жесткой фермы: возьмемъ n—угольникъ, сдѣлаемъ его жесткимъ, помощію n—3 діагоналей, и затѣмъ начнемъ прибавлять къ нему новые узлы, образуя каждый новый узелъ помощію двухъ брусковъ, идущихъ отъ двухъ какихъ нибудь прежнихъ узловъ. Напр. (фиг. 10), 1, 2, 3, 4 есть первоначальный четыреугольникъ, затѣмъ послѣдовательно прибавляются узлы 5, 6, 7, 8... При этомъ способѣ образованія фермы, имѣемъ:

$$Б - 2n + 3 = 2\ (У - n)$$

т. е. опять

$$Б = 2\ У - 3.$$

10. Частные случаи плоскихъ фермъ съ лишними линіями представлены на слѣд. фигурахъ.

На фиг. 11 въ среднихъ панеляхъ лишняя вторая (перекрестная) діагональ:

Ферма фиг. 12 имѣетъ одинъ лишній брусокъ, а именно здѣсь лишняя одна изъ конечныхъ стоекъ a или b.

Въ серповидной стропильной фермѣ (фиг. 13) затяжка A представляетъ лишній брусокъ. Ферма съ двойной системой раскосовъ, изображенная на фиг. 14, имѣетъ 42 узла и 85 брусковъ слѣд. *четыре* лишнихъ бруска [2]),

11. Пятый примѣръ. Раскосныя фермы въ пространствѣ. Для строительнаго дѣла, конечно, пригодны только жесткія системы, т. е. такія, что фигура ихъ не можетъ быть измѣнена, пока длина всѣхъ

---

[1]) Само собою разумѣется, что для полученія статической опредѣлимости такое условіе относительно числа брусковъ и узловъ должно быть соблюдено не только для всей фермы въ совокупности, но и для отдѣльныхъ частей ея, которыя могутъ быть получены изъ нея, дѣлая отрѣзы у узловъ. Этимъ дополнительнымъ ограниченіемъ мы устраняемъ конструкціи, въ которыхъ одна часть содержитъ недостаточное число брусковъ, и потому не представляетъ жесткую систему, а другая часть содержитъ лишніе бруски.

[2]) Бруски ab, cd, ef, eh лишніе.

брусковъ составляющихъ систему, остается неизмѣнною. Только такія системы могутъ быть названы фермами. Всякому измѣненію фигуры такой системы сопротивляется одинъ или нѣсколько брусковъ, которые должны бы были растянуться или укоротиться при такомъ измѣненіи.

Примѣняя здѣсь начало возможныхъ перемѣщеній, также какъ для случая плоскихъ фермъ, получимъ подобный же результатъ. Система будетъ статически опредѣлима тогда, если можно задать произвольно длину каждаго изъ ея брусковъ. Иначе: въ составъ фермы должны входить только бруски совершенно необходимые для ея жесткости. Предполагая, что одинъ какой нибудь изъ брусковъ измѣняетъ свою длину, и примѣняя къ этому случаю начало возможныхъ перемѣщеній, получимъ уравненіе, въ которое входятъ внѣшнія силы и напряженіе этого избраннаго нами бруска; всѣ же прочія напряженія остальныхъ брусковъ исключаются. Въ этомъ заключается общая метода расчета статически опредѣлимыхъ фермъ.

12. Другой способъ расчета этихъ системъ заключается въ слѣдующемъ: будемъ отрѣзать одинъ за другимъ узлы фермы и для каждаго узла напишемъ условія равновѣсія внутреннихъ и внѣшнихъ силъ, въ немъ сходящихся. Получимъ для каждаго узла три уравненія, а именно уравненія проекцій силъ на три взаимно перпендикулярныхъ направленія. Если число всѣхъ узловъ есть $У$, то число уравненій будетъ $3У$. Но не все это число уравненій можетъ быть примѣнено для нахожденія напряженій. Часть ихъ будетъ слѣдствіемъ остальныхъ, потому что внѣшнія силы, приложенныя къ фермѣ, не совершенно произвольны, а должны удовлетворять шести необходимымъ условіямъ равновѣсія. Эти шесть уравненій должны получиться, черезъ исключеніе всѣхъ внутреннихъ силъ изъ системы $3У$ уравненій, представляющихъ равновѣсіе узловъ. Слѣд. въ такой системѣ мы можемъ шесть любыхъ уравненій замѣнить указанными условіями равновѣсія внѣшнихъ силъ. Оказывается, что тогда въ системѣ останется только

$$3У - 6$$

такихъ уравненій, которыя пригодны для нахожденія напряженій брусковъ. Изъ нихъ можно опредѣлить только

$$3У - 6$$

неизвѣстныхъ.

Эти соображенія указываютъ, что статически опредѣлимая пространственная ферма, имѣющая $У$ узловъ, должна содержать

$$3У - 6$$

брусковъ. Если число брусковъ $Б$ больше предыдущаго выраженія, то разность

$$Б - (3У - 6)$$

представить число лишнихъ брусковъ.

13. Теорема Коши. Изъ предыдущаго получается слѣдующая теорема Коши, которая очень важна для оцѣнки того будетъ ли система статически опредѣлима или нѣтъ:

Ферма имѣющая видъ сомкнутаго многогранника, съ треугольными гранями, въ которой бруски расположены по ребрамъ многогранника, будетъ статически опредѣлима.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этой теоремы, вспомнимъ, что по теоремѣ Эйлера, во всякомъ многогранникѣ число его граней $Г$, сложенное съ числомъ вершинъ $В$, равно числу реберъ $Р$, сложенному съ двумя:

$$Г + В = Р + 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Но такъ какъ всѣ грани треугольныя, и каждое ребро входитъ въ составъ двухъ граней, то

$$3Г = 2Р$$

Помощію этого соотношенія, мы можемъ исключить $Г$ изъ урав. (1), и получаемъ

$$3В - 6 = Р$$

т. е. совершенно такое же отношеніе между числомъ вершинъ и реберъ, какъ установленная нами зависимость между числомъ брусковъ и числомъ узловъ въ статически опредѣлимой системѣ. И такъ, если бруски расположить по ребрамъ сомкнутаго многогранника, всѣ грани котораго треугольныя, то получимъ статически опредѣлимую пространственную ферму.

14. Теорема Коши даетъ очень важныя указанія относительно числа и расположенія линій необходимыхъ для жесткости. Такъ напр. изъ нея слѣдуетъ, что въ мостовой фермѣ съ паралельными поясами и ѣздой по верху (фиг. 15), всѣ крѣпленія, располагаемыя *внутри* ея, представляютъ лишнія линіи. Для жесткости ея необходимы только треугольныя системы по шести наружнымъ гранямъ призмы.

При параболическихъ фермахъ (фиг. 15-bis), для жесткости также нѣтъ необходимости во внутреннихъ крѣпленіяхъ, а достаточно ограничиться треугольными системами связей въ поверхности нижняго пояса и на плоскости верхняго пояса, какъ это показано на фигурѣ въ планѣ. Внутреннія крѣпленія, которыя обыкновенно ставятся въ этихъ фермахъ, имѣютъ значеніе дополнительныхъ частей, усиливающихъ жесткость и облегчающихъ напряженія другихъ брусковъ.

Условія для устройства жесткихъ купольныхъ фермъ также вполнѣ разъясняются теоремой Коши.

15. Совокупность лишнихъ реакцій и лишнихъ брусковъ въ фермѣ. Часто статическая неопредѣлимость вызывается совокупностью двухъ обстоятельствъ выше разсмотрѣнныхъ: a) лишними реакціями опоръ и b) лишними брусками фермы. Тогда число лишнихъ неизвѣстныхъ равно суммѣ двухъ чиселъ, показывающихъ сколько лишнихъ неизвѣстныхъ получается вслѣдствіе условій a и b.

16. Системы, не имѣющія лишнихъ брусковъ, но содержащія лишнія опоры, могутъ быть видоизмѣнены, помощію отбрасыванія нѣкоторыхъ изъ необходимыхъ брусковъ. Этимъ путемъ уменьшается число лишнихъ неизвѣстныхъ, и даже можно сдѣлать систему статически опредѣлимою, несмотря на имѣющееся въ ней излишнее число реакцій [1]).

Такъ напр. плоская ферма (фиг. 16) имѣетъ три опоры, вызывающія 4 реакціи (двѣ въ опорѣ A, и по одной въ качающейся опорѣ BD, и скользящей опорѣ C. Такимъ образомъ по числу опоръ система относится къ системамъ съ лишними неизвѣстными. Но, отбрасывая брусокъ a, дѣлаемъ ее статически опредѣлимою.

Другой примѣръ представляетъ цѣпной мостъ, къ которому для жесткости присоединена раскосная балка. Это очень часто встрѣчающійся видъ цѣпныхъ мостовъ (фиг. 17).

Раскосная балка имѣетъ одну неподвижную опору A (двѣ реакціи) и одну скользящую опору B (одна реакція). Цѣпь моста представляетъ четыре опоры

$$C,\ D,\ E,\ F,$$

и для каждой опоры, получается по одной реакціи. Всего имѣемъ 7 неизвѣстныхъ реакцій. Прибавляя сюда 34 бруска, напряженія которыхъ должны быть найдены, имѣемъ въ суммѣ

$$41$$

неизвѣстную величину.

Для нахожденія ихъ имѣемъ по одному уравненію для опоръ C, D, E, F, и по два уравненія для остальныхъ 18-ти узловъ,

---

[1]) Но при этомъ двѣ операціи—1) нахожденіе реакцій опоръ, и 2) нахожденіе напряженій въ частяхъ фермы—не вполнѣ раздѣлены одна отъ другой. Между ними получается извѣстная связь, и оба эти вопроса должны быть рѣшаемы одновременно.

а всего 40 уравненій. Слѣд. здѣсь имѣется одна лишняя неизвѣстная.

Но стоитъ только отбросить брусокъ a, т. е. устроить балку AB въ формѣ двухъ частей соединенныхъ шарнеромъ K, и система превращается въ статически опредѣлимую.

17. Купольныя фермы. При устройствѣ ихъ обыкновенно число опорныхъ реакцій болѣе шести. Но, поставивши въ фермѣ бруски въ числѣ меньшемъ, чѣмъ тройное число узловъ безъ шести, можно сдѣлать ферму статически опредѣлимою.

Разсмотримъ напр. ферму (фиг. 18) открытую сверху для помѣщенія фонаря. Такая ферма состоитъ изъ двухъ плоскихъ многоугольныхъ основаній, (малаго A вверху, и большаго B—внизу), соединенныхъ ребрами a, a'.—съ промежуточными поясами b, b'..., и діагональными раскосами c, c'... Фонарь представляетъ внѣшнюю нагрузку, опирающуюся на узлы многоугольника A; нижнимъ основаніемъ ферма соединена со стѣнами перекрываемаго помѣщенія.

Чтобы вывести условія, при которыхъ эта система будетъ статически опредѣлима, дополнимъ ее сначала нѣсколькими прибавочными линіями. А именно прибавимъ въ многоугольникахъ A и B діагонали, дѣлящія эти фигуры на треугольники. Тогда наша система представитъ многогранникъ, удовлетворяющій условіямъ теоремы Коши. Слѣд. это была бы статически опредѣлимая система, если для ея опоръ назначено шесть стѣсненій ея свободы, вызывающихъ шесть неизвѣстныхъ реакцій.

Затѣмъ преобразуемъ эту систему. Вмѣсто шести стѣсненій, введемъ неподвижное укрѣпленіе всѣхъ узловъ нижняго основанія; если число ихъ n, то этимъ вводится $3n$ реакцій, и слѣд.

$$3n - 6$$

этихъ реакцій будутъ излишнія. Для приданія системѣ свойства статической опредѣлимости, нужно отбросить $3n-6$ линій. Выберемъ слѣдующія линіи: a) всѣ діагонали верхняго и нижняго основаній—числомъ $2(n-3)$; b) всѣ стороны нижняго основанія—числомъ n. Получимъ статически опредѣлимую систему, изображенную на фиг. 19. Напряженія всѣхъ ея частей и всѣ реакціи могутъ быть найдены изъ условій равновѣсія узловъ.

Замѣтимъ, что полученная этимъ путемъ ферма производитъ горизонтальный распоръ на стѣны, къ которымъ прикрѣплено ея нижнее основаніе. Во многихъ случаяхъ такой распоръ неудобенъ, и не можетъ быть допущенъ. Для устраненія его приходится сохранить, нѣкоторыя изъ отброшенныхъ линій—стороны или діагонали нижняго основанія.

18. Моменты изгиба какъ лишнія неизвѣстныя. Мы считали, что въ предыдущихъ системахъ изгиба нѣтъ; это достигается примѣненіемъ шарнерныхъ соединеній Если же соединенія жесткія, то въ мѣстахъ прикрѣпленія брусковъ появляются нѣкоторыя пары силъ, которыя относятся къ числу неизвѣстныхъ. Пары эти измѣряются ихъ моментами.

ГЛАВА II.

Методъ рѣшенія.

19. Связь вопроса о нахожденіи лишнихъ неизвѣстныхъ съ задачей объ опредѣленіи измѣненія фигуры фермы. Прежде всего замѣтимъ, что одновременно съ вопросомъ объ нахожденіи лишнихъ неизвѣстныхъ, мы будемъ излагать рѣшеніе задачи объ измѣненіи фигуры различныхъ употребительныхъ фермъ. Эти два вопроса находятся между собою въ тѣсной связи, вызываемой тѣмъ обстоятельствомъ, что первый вопросъ рѣшается помощію начала возможныхъ перемѣщеній. А для примѣненія этого начала потребуется знать перемѣщенія точекъ, гдѣ приложены силы; слѣд. неизбѣжно придется разыскивать эти перемѣщенія, т. е. находить измѣненіе фигуры нашихъ фермъ. Такимъ образомъ указанные два вопроса тѣсно связаны, и переплетаются между собою. Рѣшеніе ихъ должно вестись одновременно и параллельно.

20. Общность излагаемаго нами рѣшенія. Мы видѣли, что употребляемыя въ практикѣ системы съ лишними неизвѣстными очень разнообразны. Фермы могутъ быть плоскія или пространственныя, безъ изгиба—или части ихъ изгибаются. Затѣмъ въ нихъ могутъ быть и болѣе сложныя измѣненія формы. Желательно дать общее рѣшеніе, примѣнимое ко всѣмъ случаямъ, и лучше всего разсматривать всѣ эти случаи сразу.

Этого обыкновенно не дѣлаютъ, а ограничиваются отдѣльнымъ разсмотрѣніемъ нѣкоторыхъ группъ или классовъ. Такъ иногда разсматриваютъ отдѣльно: a) плоскія фермы, въ которыхъ нѣтъ изгиба, а только растяженіе и сжатіе; b) плоскія фермы, части которыхъ не только растягиваются или сжимаются, но еще и изгибаются.

Или ведутъ выводы отдѣльно для двухъ случаевъ: a) фермы, въ которыхъ вовсе нѣтъ изгиба; b) упругое тѣло произвольной фигуры, подверженное дѣйствію произвольныхъ нагрузокъ.

Очевидно при такомъ способѣ изложенія многое приходится повторять два раза. Кромѣ того есть извѣстнаго рода конструкціи, не подходящія подъ указанныя рубрики. Слѣдовало бы для этихъ конструкцій повторить разсмотрѣніе еще разъ.

Вмѣсто этого мы постараемся вести изложеніе вполнѣ общимъ образомъ. Наши теоремы и пріемы будутъ примѣнимы ко всевозможнымъ упругимъ системамъ.

21. Примѣненіе обобщенныхъ координатъ. Для этого нужно имѣть въ своемъ распоряженіи удобные математическіе пріемы или орудія, которые были бы хорошо примѣнимы для разсмотрѣнія въ общемъ видѣ. Такимъ орудіемъ намъ послужатъ обобщенныя координаты Лагранжа. Ими всегда пользуются въ Динамикѣ для общихъ выводовъ, и тамъ очень хорошо выказывается удобство оперированія при помощи этихъ координатъ. Лучше всего это можно видѣть въ классическомъ сочиненіи по Динамикѣ:

Lord Kelvin and P. Tait. Treatise on Natural Philosophy.

Обобщенныя координаты съ особымъ успѣхомъ примѣняются въ Акустикѣ. Въ этомъ можно убѣдиться изъ двухъ замѣчательныхъ книгъ по теоріи звука:

Helmholtz. Vorlesungen ueber die mathematischen Principien der Akustik.

Lord Rayleigh. Theory of Sound.

А такъ какъ Акустика находится въ близкомъ родствѣ съ теоріей упругости, то и для нашего вопроса нужно ожидать успѣха отъ примѣненія обобщенныхъ координатъ [1]).

Обобщенныя координаты введены Лагранжемъ спеціально для вопросовъ Механики. Этимъ названіемъ обозначаются независимыя перемѣнныя, опредѣляющія положеніе тѣла или любой системы тѣлъ. Смотря по виду, составу и свойствамъ системы, ея обобщенныя координаты принимаютъ различныя, разнообразныя формы. Такъ напр. для неизмѣняемой системы обобщенными координатами будутъ служить слѣдующія шесть величинъ: три проекціи поступательнаго перемѣщенія на координатныя оси и три угловыя перемѣщенія для вращеній около координатныхъ осей. Эти шесть величинъ вполнѣ опредѣляютъ положеніе и перемѣщенія тѣла, и помощію ихъ движеніе тѣла описывается и изслѣдуется гораздо проще, чѣмъ при посредствѣ Декартовыхъ координатъ, принятіе которыхъ заставило бы насъ разсматривать по три координаты для каждой точки тѣла, а число такихъ точекъ безконечно большое.

---

[1]) Многое въ нашихъ выводахъ заимствовано изъ только что упомянутой книги лорда Рэйлэя о звукѣ. Это замѣчательное сочиненіе необходимо изучить каждому интересующемуся вопросами Статики, Динамики и Теоріи Упругости.

Далѣе—возьмемъ систему съ полными связями, напр. любую изъ нашихъ машинъ. Въ системѣ этого рода перемѣщенія всѣхъ точекъ ея вполнѣ опредѣляются перемѣщеніемъ одной изъ нихъ. Слѣд. здѣсь имѣемъ дѣло со случаемъ, когда все опредѣляется значеніемъ одной перемѣнной—перемѣщеніемъ избранной нами точки. Это перемѣщеніе и будетъ обобщенная координата для системы съ полными связями.

Если имѣемъ тѣло, сжимаемое равномѣрно по всѣмъ направленіямъ, то перемѣнная вполнѣ опредѣляющая состояніе этого тѣла, есть уменьшеніе объема его. Такое уменьшеніе и слѣдуетъ принять за обобщенную координату.

Для плоской раскосной системы, въ которой нѣтъ изгиба, слѣдуетъ принять координатами перемѣщенія ея узловъ; для каждаго узла нужно знать два его перемѣщенія—вертикальное и горизонтальное. Они вполнѣ опредѣляютъ состояніе этой системы.

Вмѣсто того можно назначить координатами для той же системы слѣдующія величины: удлиненія (или сжатія) всѣхъ ея брусковъ. Эти данныя вполнѣ опредѣляютъ состояніе нашей системы.

22. Обобщенныя силы. Употребленіе обобщенныхъ координатъ необходимо вызываетъ примѣненіе такъ называемыхъ обобщенныхъ силъ. Каждый изучающій Механику конечно замѣтилъ, что силы часто встрѣчаются группами, связанными между собою. Чаще всего встрѣчается группа, называемая *парою* силъ. Далѣе безпрестанно встрѣчаются *двѣ силы равныя и прямопротивуположныя*, производящія растяженіе или сжатіе. При явленіяхъ сдвига встрѣчается извѣстная *группа изъ 4-хъ силъ* (фиг. 20), образующихъ совокупность двухъ противуположныхъ паръ. Нерѣдко встрѣчается группа, представленная на фиг. 21, состоящая изъ трехъ параллельныхъ силъ Q, R, S; здѣсь R и S уравновѣшиваютъ силу Q. Весьма распространенъ случай давленія, распредѣленнаго равномѣрно по всей поверхности тѣла: это группа, состоящая изъ очень большаго число силъ, приложенныхъ на каждомъ элементѣ поверхности.

Подобныя группы мы называемъ обобщенными силами; намъ не нужно разсматривать отдѣльно каждую изъ силъ, составляющихъ группу, и не нужно употреблять для каждой силы особое означеніе. Мы будемъ разсматривать всю группу сразу, обозначимъ ее одной буквой, и будемъ оперировать съ группой, а не съ отдѣльными силами. Это значительно упроститъ рѣшенія.

23. Работа силъ. Всѣ наши операціи съ силами будутъ вращаться въ области начала возможныхъ перемѣщеній; намъ постоянно нужно будетъ находить работу силъ для нѣкоторыхъ перемѣщеній.

Обобщенныя силы нужно выбирать такъ, что-бы работа всѣхъ силъ, составляющихъ группу, могла изобразиться однимъ членомъ. Это легко достигается для вышеприведенныхъ примѣровъ. Такъ для *пары* силъ работа ея изображается произведеніемъ изъ момента пары M на уголъ поворота ея φ, т, е. черезъ

$$M \cdot \varphi$$

Для двухъ растягивающихъ силъ P, $-P$, работа представляется произведеніемъ изъ P на удлиненіе Δ, т. е. на увеличеніе разстоянія точекъ, къ которымъ приложены силы. Здѣсь слѣд. работа равна

$$P \cdot \Delta$$

Для случая сдвига (фиг. 22), назовемъ черезъ p величину силы приходящейся на единицу площади ω, къ которой она приложена, а черезъ l длину тѣла. Если уголъ перекашиванія будетъ g, то работа всѣхъ четырехъ дѣйствующихъ силъ представится черезъ

$$p \cdot \omega \cdot l \cdot g$$

или

$$p \cdot W \cdot g,$$

гдѣ W—объемъ тѣла.

Въ случаѣ представленномъ на фиг. 21, работа совокупности всѣхъ трехъ силъ, при перемѣщеніи точекъ A, B, C, найдется, если мы узнаемъ на сколько новое положеніе точки C будетъ отстоять отъ новаго положенія прямой AB. Называя это разстояніе черезъ f, получимъ для работы выраженіе

$$Q \cdot f.$$

Возьмемъ случай давленія распредѣленнаго равномѣрно по всей поверхности тѣла, и составляющаго q кил. на единицу площади. Мы получимъ работу всѣхъ силъ, составляющихъ группу, если умножимъ q на измѣненіе объема тѣла, которое назовемъ w. Работа будетъ

$$q \cdot w$$

Такимъ образомъ для каждой обобщенной силы получается только одинъ членъ въ выраженіи работы.

24. Соотвѣтствіе между силами и координатами. Группы внѣшнихъ силъ, которыя мы принимаемъ за одну обобщенную силу, должны быть подбираемы сообразно съ принятыми нами обобщенными координатами, опредѣляющими положеніе нашего тѣла или системы. А именно: пусть обобщенныя координаты, т. е. независимыя перемѣнныя, опредѣляющія положеніе или состояніе тѣла, будутъ:

$$\varphi,\ \psi,\ \theta\ .\ .\ .\ .$$

Тогда нужно взять такое же число обобщенныхъ силъ

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta\ .\ .\ .\ .\ ,$$

подобравши ихъ такъ, чтобы, при безконечно малыхъ измѣненіяхъ координатъ

$$\delta\varphi,\ \delta\psi,\ \delta\theta\ .\ .\ .\ .\ ,$$

возможная работа всѣхъ внѣшнихъ силъ изобразилась суммой

$$\Phi\,.\,\delta\varphi + \Psi\,.\,\delta\psi + \Theta\,.\,\delta\theta + \ .\ .\ .\ .\ .$$

Такимъ образомъ для каждой координаты имѣется своя, ей соотвѣтствующая сила. Мы иногда будемъ означать такое соотвѣтствіе говоря, что сила и координата относятся къ одному и тому же *типу*. Всѣ приложенныя къ тѣлу внѣшнія силы должны быть распредѣлены, или разложены на эти группы.

25. Разные типы силъ. Приведенныя выше примѣры показываютъ, что различныя обобщенныя силы могутъ быть не однородны одна другой; тогда и соотвѣтствующія имъ координаты также неоднородны. Но произведенія каждой силы на соотвѣтствующія имъ координаты, или на измѣненія этихъ координатъ, т. е. члены

$$\Phi\,.\,\delta\varphi,\ \Psi\,.\,\delta\psi,\ \Theta\,.\,\delta\theta\ .\ .\ .\ .\ ,$$

входящія въ начало возможныхъ перемѣщеній, необходимо должны быть всѣ одинаковаго измѣренія.

Такъ въ приведенныхъ выше примѣрахъ имѣемъ, что обобщенная сила представляется иногда моментомъ пары M; иногда двумя силами P_1, $-P_1$, иногда давленіемъ q—приходящимся на единицу поверхности. Это все величины неоднородныя между собою. Соотвѣтственныя координаты для этихъ случаевъ будутъ:

уголъ поворота φ т. е. отвлеченное число;

удлиненіе Δ—величина линейная;

измѣненіе объема W—величина третьяго измѣренія.

Но произведенія силъ на соотвѣтствующія имъ перемѣщенія:

$$M\,.\,\varphi,\ \ P\,.\,\Delta,\ \ q\,.\,w$$

всѣ однородны между собою.

26. Равнодѣйствующія системы силъ. Пользуясь обобщенными силами, мы сохраняемъ понятіе о равнодѣйствующихъ системахъ силъ. Двѣ совокупности силъ считаются равнодѣйствующими, если замѣна одной изъ нихъ другою не нарушаетъ равновѣсія. А такъ какъ всякое равновѣсіе представляется началомъ возможныхъ перемѣщеній, то двѣ системы силъ будутъ равнодѣйствующими, если онѣ даютъ равныя выраженія для суммы возможныхъ работъ этихъ силъ. Т. е. пусть первая система состоитъ изъ силъ

$$\Phi, \Psi, \Theta \ldots,$$

которымъ отвѣчаютъ обобщенныя координаты

$$\varphi, \psi, \theta \ldots$$

Тогда элементарная работа этихъ силъ для возможнаго перемѣщенія будетъ

$$\Phi . \delta\varphi + \Psi . \delta\psi + \Theta . \delta\theta \ldots \quad (2).$$

Положимъ имѣемъ совершенно иную систему силъ, другихъ типовъ:

$$X, Y, Z \ldots$$

которымъ отвѣчаютъ координаты

$$x, y, z \ldots,$$

такъ что работа силъ для возможнаго перемѣщенія изобразится черезъ

$$X . \delta x + Y . \delta y + Z . \delta z + \ldots \quad (3).$$

Если выраженіе (3) равно выраженію (2) для всякаго возможнаго перемѣщенія тѣла, то наши двѣ системы силъ будутъ равнодѣйствующія. На самомъ дѣлѣ пусть наше тѣло находится въ равновѣсіи; тогда сумма работъ *всѣхъ* силъ, къ нему приложенныхъ, для каждаго возможнаго перемѣщенія, равна нулю. Но если мы, изъ числа всѣхъ силъ, выберемъ нѣсколько, а именно

$$\Phi, \Psi, \Theta, \ldots$$

и замѣнимъ ихъ совокупностью

$$X, Y, Z, \ldots,$$

то общая сумма работъ всѣхъ силъ не измѣнится, такъ какъ мы въ этой суммѣ только замѣнимъ выраженіе (2) равнымъ ему выраженіемъ (3). Если общая сумма была нулемъ, то она останется нулемъ и при такой замѣнѣ. Слѣд. равновѣсіе не нарушится.

27. Какія у насъ будутъ координаты? У насъ координатами, опредѣляющими положеніе или состояніе упругой системы, будутъ служить иногда перемѣщенія точекъ ея (точнѣе говоря проекціи этихъ перемѣщеній на различныя направленія), иногда же измѣненія формы ея частей—удлиненія, изгибы, сдвиги и т. д. Всѣ эти координаты мы будемъ отсчитывать отъ начальнаго, естественнаго состоянія системы, т. е. отъ такого состоянія ея, когда она вовсе не подвержена дѣйствію нагрузокъ.

28. Потенціальная энергія. Вопросъ нашъ рѣшается при помощи Статики и Теоріи Упругости. Желая разсмотрѣть его самымъ общимъ образомъ, мы рѣшили пользоваться самымъ общимъ закономъ Статики—началомъ возможныхъ перемѣщеній. Подобнымъ же образомъ мы должны взять, для пользованія Теоріей Упругости, изъ этой науки нѣкоторый вполнѣ общій законъ, примѣнимый ко всѣмъ упругимъ системамъ. Такимъ общимъ закономъ послужитъ для насъ выраженіе для *потенціальной энергіи* упругихъ тѣлъ.

Не только упругія, но и разныя другія тѣла и системы владѣютъ свойствомъ при измѣненіи формы накоплять въ себѣ потенціальную энергію, которая потомъ можетъ быть использована. Для упругихъ тѣлъ такое свойство ихъ выражается въ общежитіи словомъ пружинность. Потенціальная энергія при измѣненіи формы вызывается работой тѣхъ внѣшнихъ силъ, которыя измѣняютъ форму, и представляетъ собою какъ бы накопленную, запасенную работу внѣшнихъ силъ. Чтобы вся работа нагрузокъ могла превратиться въ потенціальную энергію деформируемаго тѣла, необходимо слѣдующее условіе: нагрузки должны быть *во все время деформаціи* только какъ разъ достаточны для уравновѣшенія внутреннихъ силъ, но не болѣе того. Избытокъ нагрузокъ вызоветъ то, что часть ихъ работы преобразуется въ кинетическую энергію, и тогда произведенная работа внѣшнихъ силъ не будетъ служить мѣрою накопленной потенціальной энергіи. И такъ если желаемъ измѣрить потенціальную энергію посредствомъ работы внѣшнихъ силъ, производящихъ деформацію, то нужно назначить для этихъ силъ такія, постепенно измѣняющіяся величины, которыя для каждаго мгновенія были бы какъ разъ достаточны для уравновѣшенія внутреннихъ напряженій.

Лучше всего это объяснится на слѣдующемъ простомъ примѣрѣ: разсмотримъ потенціальную энергію упругаго бруска, которая накопится въ немъ, когда будемъ растягивать его отъ естественнаго состоянія до полученія удлиненія λ. Вообразимъ себѣ одно изъ промежуточныхъ состояній нашего бруска, когда онъ имѣетъ удлиненіе γ. Для уравновѣшенія внутреннихъ силъ въ этомъ состояніи, нужно приложить къ бруску внѣшнюю растягивающую силу, величина которой должна быть

$$P = E \cdot \omega \cdot \frac{\gamma}{l}$$

(E—коефф. упругости,
ω—площадь сѣченія,
l—длина бруска).

Сила P—пропорціональна γ, и перемѣняется съ его измѣненіемъ.

Такъ какъ внѣшняя сила уравновѣшиваетъ внутреннія, то сумма работъ и всѣхъ силъ для безконечно малаго возможнаго перемѣщенія должна быть равна нулю. Для нашего упругаго тѣла такимъ возможнымъ перемѣщеніемъ служитъ безконечно малое увеличеніе удлиненія.

$$d\,\gamma.$$

Слѣдовательно, при увеличеніи удлиненія на $d\,\gamma$, сумма работъ внутреннихъ силъ и внѣшней силы P равна нулю. Другими словами работа внутреннихъ силъ численно равна, а по знаку противуположна, работѣ внѣшней силы, т. е. величинѣ

$$P \cdot d\gamma$$

или

$$E \cdot \omega \cdot \frac{\gamma}{l} \cdot d\gamma.$$

Послѣднее выраженіе даетъ величину потенціальной энергіи, накопившейся въ брускѣ при удлиненіи

$$d\gamma.$$

Полная потенціальная энергія получится какъ сумма такихъ элементарныхъ выраженій. Представимъ себѣ, что все удлиненіе отъ нуля до λ раздѣлено на элементарныя части

$$d\gamma;$$

для каждаго элемента составимъ выраженіе накопившейся потенціальной энергіи, равное работѣ соотвѣтствующей внѣшней силы, и сложимъ всѣ эти накопленія. Получимъ полную запасенную потенціальную энергію

$$V = \int_0^\lambda E\omega \frac{\gamma}{l} \cdot d\gamma = E \cdot \omega \frac{\lambda^2}{2l}.$$

Совершенно подобно этому простому случаю, происходитъ дѣло и во всѣхъ болѣе сложныхъ случаяхъ деформаціи.

Накопленная потенціальная энергія зависитъ отъ получившагося окончательно измѣненія формы, и вполнѣ опредѣляется этимъ измѣненіемъ т. е. не зависитъ отъ пути по которому происходило измѣненіе. Другими словами она есть совершенно опредѣленная функція тѣхъ координатъ, которыя опредѣляютъ состояніе тѣла. Какъ бы ни мѣнялась форма тѣла, но если при концѣ нашего наблюденія она такая же, какъ въ началѣ его, то окончательная потенціальная энергія одинакова съ начальной.

Форма или видъ такой функціи можетъ быть разнообразная; она опредѣляется свойствами тѣла. Но для упругихъ твердыхъ тѣлъ можно показать, что ихъ потенціальная энергія всегда должна имѣть слѣдующую опредѣленную форму: *она есть однородная функція второй степени отъ координатъ опредѣляющихъ состояніе тѣла.*

Справедливость этого положенія указывается слѣдующимъ простымъ соображеніемъ: потенціальная энергія представляетъ работу упругихъ силъ, и опредѣляется произведеніемъ этихъ силъ на перемѣщенія, или на измѣненія формы. Но самыя упругія силы пропорціональны этимъ перемѣщеніямъ, или измѣненіямъ. Поэтому работа ихъ представится однородной функціей второй степени отъ означенныхъ измѣненій, т. е. отъ координатъ, опредѣляющихъ состояніе тѣла.

Называя эти координаты въ общемъ случаѣ черезъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta \ldots\ldots,$$

получимъ общее выраженіе для потенціальной энергіи въ формѣ

$$V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\theta^2 + \ldots\ldots +$$
$$+ a'\varphi\psi + b'\varphi\theta + c'\psi\theta + \ldots\ldots$$

Здѣсь

$$a,\ b,\ c \ldots\ldots$$
$$a',\ b',\ c' \ldots\ldots$$

постоянные коеффиціенты, зависящіе отъ упругихъ свойствъ тѣла. Въ этомъ выраженіи мы отдѣлили въ двѣ отдѣльныя строчки члены съ квадратами координатъ отъ членовъ съ произведеніями координатъ.

Высказанное выше положеніе о видѣ функціи, представляющей потенціальную энергію, будетъ служить для насъ общимъ опредѣленіемъ всѣхъ упругихъ тѣлъ, общимъ свойствомъ ихъ, и дастъ возможность говорить сразу о всѣхъ упругихъ тѣлахъ, и дѣлать выводы примѣнимые ко всѣмъ имъ [1]). По важности этого положенія, мы не ограничимся вышеприведеннымъ обоснованіемъ его, а постара-

---

[1]) Это опредѣленіе относится не только къ изотропнымъ тѣламъ, но включаетъ въ себѣ всѣ случаи анизотропіи.

емся показать вѣрность его и другимъ путемъ, который можетъ быть для многихъ читателей окажется болѣе убѣдительнымъ.

29. Зависимость между внѣшними силами и потенціальной энергіей. Для этого сначала напомнимъ одну теорему Общей Механики, справедливую для всѣхъ тѣхъ случаевъ, когда внутреннія силы имѣютъ потенціалъ, т. е. когда для нихъ можно составить выраженіе потенціальной энергіи, зависящее только отъ координатъ, опредѣляющихъ состояніе тѣла.

Пусть эти координаты, т. е. независимыя перемѣнныя, опредѣляющія состояніе тѣла, будутъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta\ .\ .\ .\ .$$

Величины координатъ мы считаемъ отъ естественнаго, ненапряженнаго состоянія тѣла, когда къ нему вовсе не приложены внѣшнія силы; при отсутствіи нагрузокъ всѣ координаты равны нулю. Напряженное состояніе тѣла характеризуется величинами указанныхъ выше координатъ. Внѣшнія (обобщенныя) силы, уравновѣшивающія взятое нами напряженное состояніе, означимъ тѣми же буквами, какъ и соотвѣтствующія имъ координаты, но для силъ примѣнимъ прописной (крупный) шрифтъ:

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta\ .\ .\ .\ .$$

Число силъ одинаково съ числомъ координатъ; сила и координата взаимно соотвѣтствующія (относящіяся къ одному и тому-же типу) означены одной и той-же буквой алфавита. Т. е. другими словами элементарная работа внѣшнихъ силъ, при измѣненіи координатъ на величины

$$d\varphi,\ d\psi,\ d\theta\ .\ .\ .\ .$$

изображается многочленомъ:

$$\Phi\,.\,d\varphi + \Psi\,.\,d\psi + \Theta\,.\,d\theta + \ .\ .\ .\ .$$

Потенціальная энергія нашего тѣла можетъ быть разсматриваема какъ накопленная изъ отдѣльныхъ элементарныхъ работъ внѣшнихъ нагрузокъ, уравновѣшивающихъ напряженія. Мы въ n^0 28 уже объяснили характеръ этого явленія, и привели для примѣра простое растяженіе. Будемъ теперь въ общемъ случаѣ поступать также, какъ мы дѣлали для растяженія.

Такъ какъ наше тѣло находится въ равновѣсіи, то мы можемъ примѣнить къ нему начало возможныхъ перемѣщеній, т. е. общій законъ равновѣсія, примѣнимый для всѣхъ тѣлъ и системъ. Напишемъ, что сумма работъ всѣхъ силъ, внѣшнихъ и внутреннихъ, для безконечно малаго возможнаго перемѣщенія равна нулю. Это перемѣщеніе представляется приращеніями координатъ:

$$d\varphi,\ d\psi,\ d\theta\ .\ .\ .\ .$$

Работа внѣшнихъ силъ для него изображается многочленомъ

$$\Phi\ .\ d\varphi + \Psi\ .\ d\psi + \Theta\ .\ d\theta + \ .\ .\ .\ .$$

Что касается до работы внутреннихъ силъ, то она можетъ быть выражена, если извѣстна потенціальная энергія V въ функціи отъ координатъ. Эта энергія представляетъ собою запасенную работу, которая въ случаѣ нужды можетъ быть возвращена при возстановленіи формы тѣла, и такое возвращеніе работы и производится внутренними силами. Онѣ при постепенномъ возстановленіи формы будутъ мало помалу отдавать запасенную потенціальную энергію, т. е. будутъ повторять въ обратномъ порядкѣ то, что происходило въ прямомъ при деформаціи. Назовемъ черезъ

$$\delta V$$

то приращеніе потенціальной энергіи, которое получается при увеличеніи координатъ на

$$d\varphi,\ d\psi,\ d\theta\ .\ .\ .\ .$$

При возстановленіи формы, т. е. когда координаты опять уменьшатся на

$$d\varphi,\ d\psi,\ d\theta\ .\ .\ .\ .$$

и вернутся къ прежнимъ своимъ величинамъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta\ .\ .\ .\ .\ ,$$

внутреннія силы возстановятъ изъ накопленной потенціальной энергіи величину ея

$$\delta V.$$

Отсюда видимъ, что обратно при увеличеніи координатъ отъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta\ .\ .\ .\ .$$

на

$$d\varphi,\ d\psi,\ d\theta\ .\ .\ .\ .$$

внутреннія силы производятъ работу численно равную

$$\delta V,$$

но отличающуюся отъ нея знакомъ.

Складывая работы внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, и уравнивая сумму нулю, получимъ:

$$\Phi \, . \, d\varphi + \Psi \, . \, d\psi + \Theta \, . \, d\theta + \ldots \ldots - \delta V = 0 \ldots \ldots (4).$$

Но потенціальная энергія есть функція независимыхъ перемѣнныхъ

$$\varphi, \ \psi, \ \theta \ldots \ldots ;$$

по этому приращеніе ея представляется, помощію производныхъ этой функціи, выраженіемъ:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \frac{\partial V}{\partial \psi} \cdot d\psi + \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot d\theta + \ldots \ldots$$

Вставляя это выраженіе δV въ послѣднее уравненіе (4), и собирая въ одно члены съ общими множителями, получимъ:

$$\left(\Phi - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) \cdot d\varphi + \left(\Psi - \frac{\partial V}{\partial \psi}\right) \cdot d\psi + \left(\Theta - \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \cdot d\theta + \ldots \ldots = 0$$

Но у насъ

$$\varphi, \ \psi, \ \theta$$

представляютъ *независимыя* перемѣнныя, слѣд. приращенія ихъ

$$d\varphi, \ d\psi, \ d\theta \ldots \ldots$$

совершенно другъ отъ друга независятъ и могутъ получать, каждое отдѣльно, любую назначенную нами величину, напр. 0. Поэтому въ предыдущемъ равенствѣ коеффиціенты у приращеній

$$d\varphi, \ d\psi, \ d\theta \ldots \ldots$$

должны быть, каждый порознь, равны нулю. Получимъ:

$$\Phi = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\Psi = \frac{\partial V}{\partial \psi}$$

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

т. е. имѣемъ слѣдующую общую теорему:

Внѣшнія силы изображаются производными отъ потенціальной энергіи по соотвѣтствующимъ координатамъ.

Замѣтимъ, что при выводѣ этой теоремы мы не дѣлали никакихъ предположеній относительно формы функціи V. Слѣдовательно это теорема общая, справедливая для всѣхъ случаевъ когда внутреннія силы имѣютъ потенціалъ. Теорема эта давно извѣстна и ведетъ свое начало отъ Лагранжа.

Такъ какъ потенціальная функція V даетъ своими производными величины внѣшнихъ силъ, то часто функцію V называютъ *функціей силъ* (fonction des forces, Kraftfunction) [1].

30. Обобщенный законъ Гука. Только что указанная теорема представляетъ единственный общій, независящій отъ формы функціи

$$V,$$

законъ, которымъ мы будемъ пользоваться. Всѣ дальнѣйшіе выводы относятся исключительно къ *упругимъ твердымъ тѣламъ*, къ которымъ мы теперь и возвратимся.

Для характеристики упругихъ тѣлъ лучше всего взять общую теорему о сложномъ сопротивленіи. По этой теоремѣ дѣйствія отдѣльныхъ нагрузокъ складываются, если эти силы приложены одновременно. Законъ Гука, получается какъ частный случай этой теоремы; по закону Гука всякое перемѣщеніе или измѣненіе формы пропорціонально той нагрузкѣ, которая его вызываетъ. Выразимъ эту теорему алгебрически. На основаніи ея наши перемѣщенія

$$\varphi,\ \psi,\ \theta \ldots .$$

представятся линейными функціями отъ нагрузокъ. Напр. для перемѣщенія φ должны имѣть зависимость:

$$\varphi = a_1\,\Phi + b_1\,\Psi + c_1\,\Theta + \ldots . \quad (5)$$

Здѣсь отдѣльные члены указываютъ дѣйствія отдѣльныхъ нагрузокъ, складывающіяся согласно теоремѣ о сложномъ сопротивленіи. Дѣйствіе каждой отдѣльной нагрузки представляется членомъ, который пропорціоналенъ этой нагрузкѣ. Коеффиціенты пропорціональности

$$a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots .$$

зависятъ отъ формы, размѣровъ тѣла и его упругихъ свойствъ.

Такія же зависимости должны существовать и для другихъ координатъ, т. е.

$$\psi = a_2\,\Phi + b_2\,\Psi + c_2\,\Theta + \ldots . \quad (5)$$

$$\theta = a_3\,\Phi + b_3\,\Psi + c_3\,\Theta + \ldots . \quad (5)$$

Совокупность выраженій (5) представляетъ такъ называемый обобщенный законъ Гука: *каждая координата есть линейная функція отъ нагрузокъ*. Всѣ явленія упругости будутъ только частныя случаи этого закона.

---

[1]) Въ русскихъ сочиненіяхъ часто примѣняютъ неудачные и противурѣчащіе духу нашего языка термины: „силовая функція“, „силовое поле“. Мы воздерживаемся отъ употребленія такого прилагательнаго.

31. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что, какъ показываютъ формулы (5), любая изъ координатъ, напр. φ, можетъ вообще говоря зависѣть не только отъ соотвѣтствующей ей силы Φ, но также и отъ силъ другаго типа Ψ, Θ [1]). Такъ напр. если имѣемъ брусокъ растягиваемый силами по тремъ направленіямъ x, y, z, то удлиненіе по направленію x, зависитъ не только отъ силы X, дѣйствующей по тому же направленію, но и отъ двухъ другихъ силъ Y, Z. Означенное удлиненіе будетъ, какъ извѣстно:

$$\Delta x = \frac{X}{E} - k\frac{Y}{E} - k\frac{Z}{E}$$

гдѣ E—коеффиціентъ упругости, k—Пуассоново отношеніе.

Другимъ примѣромъ намъ послужитъ изгибъ горизонтальнаго бруска.

Если разсматриваемъ вертикальное перемѣщеніе точки A этого бруска, то соотвѣтствующая сила будетъ вертикальная нагрузка, приложенная въ A. Но не только эта нагрузка, а и всякая другая нагрузка, приложенная въ любой точкѣ бруска, сообщаетъ A вертикальное перемѣщеніе. Слѣд. это перемѣщеніе зависитъ не только отъ силы соотвѣтствующаго ему типа, но и отъ всѣхъ другихъ нагрузокъ.

Но могутъ быть частные случаи, когда каждая изъ координатъ зависитъ только отъ соотвѣтствующей ей силы. Тогда будутъ имѣть мѣста слѣдующія простыя зависимости;

$$\varphi = a \,.\, \Phi$$

$$\psi = b \,.\, \Psi$$

$$\theta = c \,.\, \Theta$$

гдѣ a, b, c,... коеффиціенты пропорціальности. Примѣромъ этого можетъ служить прямоугольный брусокъ подвергающійся тремъ сдвигамъ въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ. Координатами здѣсь будутъ углы сдвига въ этихъ плоскостяхъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$$

Называя сдвигающія силы для этихъ трехъ плоскостей (на ед. площади) черезъ

[1]) Напомнимъ что соотвѣтствіе силы и координаты опредѣляется началомъ возможныхъ перемѣщеній. Если въ выраженіи работъ сила Φ умножается на измѣненіе координаты φ, то эти сила и координата считаются соотвѣтствующими одна другой, или иначе говорится, что эта сила и эта координата—одного типа.

$$P,\ Q,\ R,$$

получимъ

$$\alpha = \frac{P}{G};\ \beta = \frac{Q}{G};\ \gamma = \frac{R}{G}$$

гдѣ G—коеффиціентъ упругости при сдвигѣ.

32. Выраженія (5) можно разсматривать какъ уравненія между неизвѣстными величинами

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta,\ \ldots$$

Эти уравненія первой степени; число ихъ равно числу неизвѣстныхъ, слѣд. неизвѣстныя могутъ быть опредѣлены элементарными пріемами исключенія. Результатомъ этого исключенія получатся внѣшнія силы:

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta,\ \ldots.$$

выраженныя функціями отъ координатъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta,\ \ldots.$$

Очевидно всѣ эти функціи будутъ первой степени отъ координатъ, такъ какъ при исключеніи не придется ни возвышать въ степени, ни умножать на координаты

$$\varphi,\ \psi,\ \theta,\ \ldots.;$$

исключеніе будетъ состоять только въ умноженіи на постоянные коеффиціенты, и въ сложеніи или вычитаніи. Поэтому въ результатѣ исключенія наши силы выразятся въ такой формѣ:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = A\varphi + B\psi + C\theta + \ldots.\\ \Psi = A'\varphi + B'\psi + C'\theta + \ldots\\ \Theta = A''\varphi + B''\psi + C''\theta + \ldots.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \cdot (6)$$

гдѣ A, B, C, ... нѣкоторые новые коеффиціенты. И такъ: Внѣшнія силы (нагрузки) выражаются линейными функціями отъ координатъ, т. е. отъ перемѣщеній или измѣненій формы.

Но по доказаному въ n^0 29, внѣшнія силы

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta,\ \ldots$$

должны равняться производнымъ потенціальной энергіи взятымъ по соотвѣтствующимъ координатамъ. Такъ какъ эти производныя оказываются функціями перваго порядка, то потенціальная энергія должна быть функціей втораго порядка относительно координатъ. Притомъ она должна быть однородной функціей. Если бы этого не было, и въ выраженіе для V входили бы члены перваго порядка, то въ производныхъ ея, т. е. въ уравненіяхъ (5) получились бы постоянные члены, независящіе отъ измѣненій формы; а это невозможно.

И такъ мы еще разъ установили наше основное положеніе: потенціальная энергія упругихъ тѣлъ есть однородная функція второй степени отъ перемѣщеній, или измѣненій, опредѣляющихъ состояніе тѣла.

33. Такая форма потенціальной энергіи можетъ быть разсматриваема какъ общее опредѣленіе всякихъ упругихъ тѣлъ и системъ. Задавая V какъ функцію второй степени отъ координатъ, мы устанавливаемъ общую схему, или динамическую модель, подъ которую подходятъ всевозможныя системы и тѣла, владѣющія свойствомъ упругости. Говоря о случаѣ когда потенціальная энергія есть однородная функція второй степени, мы говоримъ сразу о всевозможныхъ упругихъ тѣлахъ; наши выводы будутъ примѣнимы ко всѣмъ имъ.

Такимъ образомъ намъ придется далѣе оперировать съ весьма простыми функціями. Наша потенціальная энергія есть функція второго порядка, а внѣшнія силы—функціи перваго порядка относительно координатъ. Это опредѣляетъ особую простоту выводовъ и пріемовъ доказательствъ. Мы все время не будемъ выходить изъ предѣловъ Алгебры. Хотя читатель часто будетъ встрѣчать у насъ терминъ «производная», напр. производная силы Φ по координатѣ θ, но приведенныя нами выраженія указываютъ, что эта производная есть ничто иное какъ коеффиціентъ, b' у перемѣнной θ, т. е. чисто алгебрическая величина. Слѣд. намъ никогда не придется дѣлать сложныхъ выводовъ, и все ограничивается самыми элементарными математическими пріемами.

34. Равенства между коеффиціентами въ выраженіи потенціальной энергіи. Общее выраженіе потенціальной энергіи имѣетъ форму:

$$V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\theta^2 + \dots$$
$$+ a'\varphi\psi + b'\varphi\theta + c'\psi\theta + \dots \quad (7)$$

Когда она дана, то внѣшнія силы найдутся дифференцируя V по соотвѣтствующимъ координатамъ. Дѣлая это, получаемъ формулы;

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 2a\varphi + a'\psi + b'\theta + \dots \\ \Psi &= a'\varphi + 2b\psi + c'\theta + \dots \\ \Theta &= b'\varphi + c'\psi + 2c\theta + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Въ этихъ выраженіяхъ нужно обратить вниманіе на равенство многихъ изъ коэффиціентовъ, входящихъ въ нихъ. Такъ напр. въ выраженіи для Φ, коэффиціентъ при ψ есть a', и такая же величина встрѣчается въ выраженіи для Ψ, въ качествѣ коэффиціента у φ. Также получается равенство коэффиціентовъ b' въ выраженіяхъ для Φ и Θ и т. д. Эти равенства представляютъ прямое и необходимое послѣдствіе того что силы наши суть производныя отъ потенціальной энергіи.

Коэффиціенты выраженій (8) могутъ быть разсматриваемы какъ производныя силъ по координатамъ. Съ этой точки зрѣнія равенства между коэффиціентами могутъ быть изображены въ слѣдующемъ видѣ:

a) Равенство коэффиціентовъ a' въ первой и второй строчкахъ системы уравненій (8), представится такъ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}=\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$$

b) Равенство коэффиціентовъ b' въ первой и третьей строчкахъ системы (8) изобразится такъ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}$$

c) Равенство коэффиціентовъ c' во второй и третьей строчкахъ изобразимъ условіемъ

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=\frac{\partial\Theta}{\partial\psi}$$

И т. д. получаемъ цѣлый рядъ подобныхъ соотношеній, на которыя слѣдуетъ обратить вниманіе.

35. Нахожденіе величины потенціальной энергіи. Разсмотримъ теперь обратный вопросъ: нахожденіе величины потенціальной энергіи когда извѣстны выраженія (8) для внѣшнихъ силъ въ зависимости отъ координатъ. Такъ какъ приращеніе энергіи

$$\delta V$$

равняется элементарной работѣ нагрузокъ:

$$\Phi\,.\,d\varphi+\Psi\,.\,d\psi+\Theta\,.\,d\theta\;.\;.\;.\;.\;(\alpha)$$

то полная величина энергіи получится посредствомъ интегрированія послѣдняго выраженія, въ которомъ для силъ должны быть подставлены формулы (8).

При этой подстановкѣ мы должны непремѣнно получить такое выраженіе, которое окажется *полнымъ дифференціаломъ* независимыхъ перемѣнныхъ

$$\varphi, \psi, \theta, \ldots .$$

Такое заключеніе вытекаетъ прямо изъ того, что потенціальная энергія вполнѣ опредѣляется состояніемъ тѣла, т. е. V есть функція означенныхъ независимыхъ перемѣнныхъ. Кстати сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе: тѣ равенства, на которыя мы обратили вниманіе въ концѣ n^0 34, представляютъ собою математическія условія, при выполненіи которыхъ выраженіе (α) будетъ полнымъ дифференціаломъ.

36. Примѣры потенціальной энергіи упругихъ тѣлъ. Сначала напомнимъ выраженія этой энергіи для простѣйшихъ случаевъ, извѣстныя изъ курса сопротивленія матеріаловъ, а потомъ перейдемъ къ другимъ случаямъ.

Растяженіе и сжатіе. Если имѣемъ брусокъ длины l, съ поперечнымъ сѣченіемъ ω, то при удлиненіи его на λ получается энергія:

$$V = E \cdot \omega \cdot \frac{\lambda^2}{2l} \quad \ldots \quad (9)$$

Ее можно выразить иначе, вводя, вмѣсто удлиненія λ, силу T, растягивающую брусокъ. Между ними существуетъ зависимость

$$T = E\omega \frac{\lambda}{l} .$$

Слѣд.

$$V = \frac{T^2 l}{2E\omega} \quad \ldots \quad (11).$$

Намъ придется очень часто примѣнять эту формулу для разнообразныхъ фермъ. Положимъ имѣемъ ферму, для которой можно допустить, что всѣ части ея только растягиваются или сжимаются, и изгибъ вполнѣ устраненъ. Тогда полная потенціальная энергія всей фермы представится суммою членовъ такого вида какъ (11). Каждый брусокъ фермы доставитъ одинъ членъ этой суммы.

37. Сдвигъ. Здѣсь формулы аналогичны полученнымъ для растяженія. Называя уголъ сдвига черезъ g, а коеффиціентъ упругости при сдвигѣ черезъ G, получимъ

$$V = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot l \cdot G \cdot g^2$$

или

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2 l}{G\omega} .$$

Изгибъ. Ограничимся случаемъ изгиба около одной изъ *главныхъ* осей.

Сначала разсмотримъ изгибъ однородный, т. е. совершенно одинаковый по всей длинѣ тѣла. Это будетъ *круговой* изгибъ, при которомъ поперечныя сѣченія не искривляются и сдвига не происходитъ. Для полученія такого изгиба къ бруску должна быть приложена, въ плоскости изгиба, пара силъ, мѣрой величины которой будетъ служить ея моментъ M. Дуга круга, по которой изогнется ось бруска, будетъ имѣть радіусъ

$$\rho = \frac{E \,.\, I}{M},$$

гдѣ I моментъ инерціи поперечнаго сѣченія. Если первоначальная длина бруска была l, то центральный уголъ φ той дуги круга, по которой произойдетъ изгибъ, найдется изъ формулы

$$\rho \,.\, \varphi = l$$

т. е.

$$\varphi = \frac{Ml}{EI}.$$

Этотъ уголъ измѣряетъ относительный поворотъ двухъ поперечныхъ сѣченій, приходящихся на концахъ бруска. Онъ представляетъ собою обобщенную координату, отвѣчающую силѣ M. При измѣненіи угла на величину $\partial\varphi$, работа силы будетъ

$$M \,.\, \partial\varphi$$

Полная работа внутреннихъ силъ, при изгибѣ отъ естественнаго состоянія бруска, когда онъ прямой, до изгиба на уголъ φ, изобразится суммой элементарныхъ работъ:

$$\int_0^{\varphi} M \,.\, \partial\varphi = \frac{EI}{l}\int_0^{\varphi} \varphi \,.\, \partial\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{EI}{l}\cdot\varphi^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{M^2}{EI}\,l.$$

Неоднородный (не круговой) *изгибъ.* Въ этомъ случаѣ получаются сдвиги, сопровождаемые касательными внутренними силами. Для упрощенія мы пренебрежемъ работой этихъ силъ, что можно сдѣлать безъ большой ошибки, такъ какъ касательныя силы обыкновенно очень малы по сравненію съ растягивающими и сжимающими силами, образующими изгибающую пару. Тогда, для вычисленія работы внутреннихъ силъ, можно воспользоваться предыдущей формулой. Но такъ какъ теперь изгибъ не круговой, то радіусъ ρ и моментъ изгиба M мѣняются по длинѣ бруска. По этому означенную формулу слѣдуетъ примѣнять не по всему бруску сразу, а отдѣльно къ каждому безконечно малому элементу бруска, имѣющему длину dx. Подразумѣвая теперь подъ буквою M, ту величину момента изгиба, которая соотвѣтствуетъ координатѣ x (фиг. 23), получимъ работу внутреннихъ силъ для элементарной части его

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI} \cdot dx.$$

Работа для всего бруска, имѣющаго длину l, получится суммированіемъ элентарныхъ работъ, и будетъ:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M^2 \,.\, dx}{EI} \quad . \; . \; . \; . \; (12).$$

38. Сложное сопротивленіе растяженію и изгибу. Пусть P будетъ растягивающая сила, M—моментъ изгиба; Ω—площадь поперечнаго сѣченія; I—моментъ инерціи его. Волокно, длиною dx находящееся на разстояніи z отъ средней продольной плоскости бруска, (фиг. 24) подвергается растяженію силой (на ед. площади):

$$\frac{P}{\Omega} + \frac{Mz}{I}$$

Слѣд. его потенціальная энергія будетъ:

$$\left(\frac{P}{\Omega} + \frac{Mz}{I}\right)^2 \frac{\omega \,.\, dx}{2E},$$

гдѣ ω—сѣченіе волокна.

Просуммируемъ потенціальныя энергіи волоконъ, лежащихъ въ слоѣ, котораго толщина равна dx. Результатъ будетъ:

$$V = \Sigma \left(\frac{P}{\Omega} + \frac{Mz}{I}\right)^2 \frac{\omega \,.\, dx}{2E} =$$

$$\Sigma \left(\frac{P}{\Omega}\right)^2 \cdot \frac{\omega}{2E} \cdot dx + \Sigma \left(\frac{Mz}{I}\right)^2 \cdot \frac{\omega \,.\, dx}{2E} + 2\,\Sigma \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{Mz}{I} \cdot \frac{\omega \,.\, dx}{2E}$$

Вынося общіе множители за знакъ суммы, найдемъ:

$$V = \left(\frac{P}{\Omega}\right)^2 \cdot \frac{dx}{2E} \cdot \Sigma\omega + \frac{M^2}{I^2} \cdot \frac{dx}{2E} \cdot \Sigma\omega z^2 + \frac{P}{\Omega} \cdot \frac{M}{I} \cdot \frac{dx}{2E} \cdot \Sigma z\omega \quad . \; . \; . \; (13)$$

Входящія сюда суммы имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\Sigma\omega = \Omega; \quad \Sigma\omega\, z^2 = I; \quad \Sigma\omega\, z = 0.$$

Слѣд.

$$V = \frac{P^2 \,.\, dx}{2E\Omega} + \frac{M^2}{2EI} \cdot dx \quad . \ . \ . \ . \ (14).$$

Эта формула показываетъ, что потенціальная энергія, въ случаѣ растяженія вмѣстѣ съ изгибомъ, равна суммѣ потенціальныхъ энергій, получающихся для каждаго изъ этихъ простыхъ сопротивленій отдѣльно.

Замѣтимъ, что этотъ результатъ получился вслѣдствіе уничтоженія третьяго члена выраженія (13). Вообще же потенціальная энергія въ случаѣ сложнаго сопротивленія *не* равна суммѣ потенціальныхъ энергій вычисленныхъ для тѣхъ простыхъ сопротивленій, изъ которыхъ слагается сложное [1]).

Полученное выраженіе (14) даетъ V для элемента длины dx. Полная величина потенціальной энергіи получится интегрированіемъ этого выраженія.

39. Плоское однородное измѣненіе формы. Мы называемъ *плоскимъ* измѣненіемъ такое, при которомъ во всѣхъ плоскостяхъ, параллельныхъ одной опредѣленной заданной плоскости, повторяются совершенно одинаковыя явленія. Въ этомъ случаѣ можно ограничиться разсмотрѣніемъ явленія только въ двухъ измѣреніяхъ, забывая о третьемъ, перпендикулярномъ къ заданной плоскости.

Однороднымъ измѣненіемъ формы называется такое, что при немъ всѣ части тѣла измѣняются одинаковымъ образомъ. Если мы нашу плоскость раздѣлимъ сѣткой прямоугольныхъ осей на равные прямоугольники, то, при однородномъ измѣненіи, всѣ они должны получить совершенно одинаковыя измѣненія. Или иначе: сдѣлаемъ такую прямоугольную сѣтку, что получатся не одинаковые по размѣрамъ квадраты; послѣ измѣненія формы, всѣ эти квадраты должны получить формы геометрически подобныя между собою.

Изъ этого опредѣленія однороднаго измѣненія формы слѣдуетъ: 1) что при такомъ измѣненіи всѣ прямыя остаются прямыми; 2) что параллельныя линіи и послѣ измѣненія формы будутъ между

[1]) Напр. для случая совокупности двухъ растяженій T и t, получается энергія

$$V = \frac{(T+t)^2}{2E\omega} \cdot l = \frac{T^2 \,.\, l}{2E\omega} + \frac{t^2 \,.\, l}{2E\omega} + \frac{T \,.\, t \,.\, l}{E\omega}$$

собою параллельными. Т. е. всякій прямоугольникъ долженъ или остаться прямоугольникомъ, или превратится въ параллелограммъ.

Такимъ образомъ самое общее плоское однородное измѣненіе формы приводится къ слѣдующему: фигура, имѣвшая форму прямоугольника, перекашивается, т. е. превращается въ параллелограммъ, и кромѣ того длины ея сторонъ могутъ измѣняться. Другими словами это самое общее измѣненіе приводится къ двумъ растяженіямъ по взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, и къ сдвигу.

Величины удлиненій (относительныхъ) по указаннымъ двумъ направленіямъ, назовемъ черезъ e и f; уголъ сдвига означимъ g. Соотвѣтствующія силы, дѣйствующія на прямоугольникъ (фиг. 25), назовемъ буквами

$$P,\ Q,\ T \text{ (на ед. площ.).}$$

При безконечно маломъ приращеніи деформаціи, т. е. когда величины

$$e,\ f,\ g$$

получатъ приращенія

$$de,\ df,\ dg,$$

означенныя силы произведутъ элементарную работу.

$$(P\,.\,de + Q\,.\,df + T\,.\,dg)\,w \quad .\ .\ .\ .\ (15)$$

гдѣ w—объемъ нашего тѣла. Это выраженіе представляетъ безконечно малое приращеніе потенціальной энергіи V. Полная энергія получится, суммируя элементарныя приращенія для измѣненій, происходящихъ въ предѣлахъ:

для e . . . . отъ 0 до e
для f . . . . отъ 0 до f
для g . . . . отъ 0 до g.

Для такого суммированія нужно выразить

$$P,\ Q,\ T$$

въ функціи отъ

$$e,\ f,\ g$$

и произвести интегрированіе.

Зависимость между измѣненіями формы

$$e,\ f,\ g$$

и силами

$$P,\ Q,\ T$$

извѣстна изъ ученія о сопротивленіи матеріаловъ. Дѣйствіе силы P вызываетъ *по ея направленію* удлиненіе

$$\frac{P}{E};$$

сверхъ того, по тому же направленію сила Q вызываетъ сжатіе

$$k \, . \, \frac{Q}{E}$$

(E—коеффиціентъ упругости,
k—Пуассоново отношеніе)

Слѣд. удлиненіе e будетъ

$$e = \frac{1}{E}(P - k \, . \, Q) \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Подобно этому найдемъ:

$$f = \frac{1}{E}(Q - k \, . \, P) \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Затѣмъ законы сдвига даютъ уголъ сдвига:

$$g = \frac{T}{G} \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

(G—коеффиціентъ упругости при сдвигѣ).

Послѣднія три уравненія выражаютъ измѣненія формы въ функціи отъ силъ. Изъ нихъ безъ труда получимъ обратныя зависимости, выразимъ силы въ функціи отъ измѣненій формы. Изъ первыхъ двухъ уравненій находимъ:

$$P = \frac{E}{1 - k^2}(e + kf) \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

$$Q = \frac{E}{1 - k^2}(f + ke) \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

А послѣднее изъ уравненій, носящихъ номеръ 16, даетъ:

$$T = G \, . \, g \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Подставляя выраженія (17) въ (15) и произведя интегрированіе [1]), получаемъ окончательное выраженіе для потенціальной энергіи:

---

[1]) Интегрированіе производится безъ затрудненія; послѣ указанной подстановки перемѣнныя оказываются или совершенно отдѣленными одна отъ другой или онѣ соединены въ формѣ двучлена

$$e \, . \, df + f \, . \, de$$

А этотъ двучленъ представляетъ полный дифференціалъ произведенія

$$e \, . \, f$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{E}{1-k^2}(e^2+f^2+2kfe)+Gg^2\right]w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

40. Другое выраженіе для потенціальной энергіи. Эта формула выражаетъ потенціальную энергію помощію измѣненій формы

$$e, \; f, \; g.$$

Взамѣнъ того энергія можетъ быть выражена въ функціи отъ силъ

$$P, \; Q, \; T.$$

Для этого нужно взять выраженія (16) для

$$e, \; f, \; g,$$

и вставить въ (18). Такимъ путемъ получимъ:

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{P^2+Q^2}{E} - 2k\cdot\frac{1}{E}\cdot PQ + \frac{T^2}{G}\right]w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\text{-bis}).$$

Разсмотрѣнный случай однороднаго измѣненія формы представляетъ особую важность, и вотъ почему. Измѣненіе безконечно малаго элемента, вслѣдствіе отбрасыванія величинъ высшихъ порядковъ, по необходимости будетъ однородное. Слѣд. найденныя выраженія для V представляютъ общій случай плоскаго измѣненія безконечнаго малаго элемента. Полная величина энергіи получается интегрируя это выраженіе элементарной энергіи.

41. Однородное измѣненіе формы въ случаѣ трехъ измѣреній. И здѣсь сохраняется предыдущее опредѣленіе однородной деформаціи. Это такое измѣненіе, что если разобьемъ тѣло прямоугольными плоскостями на равные кубы, то всѣ кубы получатъ совершенно одинаковыя измѣненія формы. Или иначе: если разобьемъ тѣло на неравные кубы, то послѣ измѣненія формы эти части получатъ фигуры геометрически подобныя одна другой.

Какъ слѣдствіе этого получаемъ; 1) что при такомъ измѣненіи всѣ плоскости остаются плоскостями; 2) если двѣ плоскости были параллельны одна другой до деформаціи, то и послѣ нея они остаются параллельными. Слѣд. тѣло, имѣвшее первоначально форму прямоугольнаго параллелопипеда, можетъ перекоситься, но должно остаться параллелопипедомъ, хотя теперь уже косымъ. Затѣмъ длины реберъ этого новаго параллелопипеда могутъ отличаться отъ длинъ реберъ прежняго. Кромѣ такихъ измѣненій, никакія другія не удовлетворяютъ условіямъ однороднаго измѣненія.

И такъ самое общее однородное измѣненіе формы прямоугольнаго параллелопипеда будетъ состоять въ томъ, что длины его реберъ увеличатся (или уменьшатся), и въ немъ произойдутъ перекашиванія во всѣхъ трехъ координатныхъ плоскостяхъ. Слѣд. это измѣненіе вполнѣ характеризуется тремя удлиненіями реберъ, идущихъ по X, Y, Z, и тремя углами сдвига въ плоскостяхъ

$$ZY,\ XZ,\ YX.$$

Сдвиги эти назовемъ

$$a,\ b,\ c,$$

а удлиненія:

$$e,\ f,\ g.$$

Для полученія такого измѣненія въ изотропномъ тѣлѣ, нужно приложить по осямъ X, Y, Z растягивающія силы, которыя назовемъ

$$P,\ Q,\ R.$$

Кромѣ того нужно приложить сдвигающія группы силъ, величины которыхъ для сдвиговъ въ плоскостяхъ

$$ZY,\ XZ,\ YX$$

назовемъ

$$S,\ T,\ U.$$

Положимъ произойдетъ безконечно малое измѣненіе деформаціи, т. е. получатся приращенія

$$de,\ df,\ dg,\ da,\ db,\ dc.$$

Тогда указанныя силы произведутъ элементарную работу (для единицы объема)

$$P\,.\,de + Q\,.\,df + R\,.\,dg + S\,.\,da + T\,.\,db + U\,.\,dc\ \ldots\ldots (19).$$

Это выраженіе представляетъ безконечно малое приращеніе потенціальной энергіи. Чтобы найти полную величину этой энергіи, нужно вставить, вмѣсто силъ

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U,$$

ихъ выраженія въ функціи отъ измѣненій

$$e,\ f,\ g,\ a,\ b,\ c$$

и проинтегрировать.

Зависимость между силами и измѣненіями формы прямоугольнаго параллелопипеда извѣстна изъ ученія о Сопротивленіи Матеріаловъ. По направленію силы P получится удлиненіе ею производимое

$$\frac{P}{E};$$

сверхъ того присоединятся поперечныя сжатія, возбуждаемыя силами Q, R, т. е.

$$k \cdot \frac{Q}{E}\,;\; k \cdot \frac{R}{E}$$

Слѣдовательно удлиненіе e будетъ

$$e = \frac{1}{E}\Big[P - k\ (Q + R)\Big] \quad . \; . \; . \; . \; (20).$$

Также найдемъ два другія удлиненія:

$$f = \frac{1}{E}\Big[Q - k\ (P + R)\Big] \quad . \; . \; . \; . \; (20)$$

$$g = \frac{1}{E}\Big[R - k\ (P + Q)\Big] \quad . \; . \; . \; . \; (20)$$

Законы сдвига дадутъ углы перекашиванія

$$a,\ b,\ c$$

въ функціи отъ соотвѣтствующихъ силъ:

$$a = \frac{S}{G}\,;\quad b = \frac{T}{G}\,;\quad c = \frac{U}{G}\,;\quad . \; . \; . \; . \; (20).$$

Изъ шести послѣднихъ уравненій не трудно получить обратныя зависимости, т. е. выразить силы P, Q, R, S, T, U, въ функціи отъ измѣненій формы: e, f, g, a, b, c. Тогда мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{E}{1+k}\cdot\left\{e + \frac{k}{1-2k}\,(e+f+g)\right\}\\
Q &= \frac{E}{1+k}\cdot\left\{f + \frac{k}{1-2k}\,(e+f+g)\right\}\\
R &= \frac{E}{1+k}\cdot\left\{g + \frac{k}{1-2k}\,(e+f+g)\right\}\\
S &= \frac{a}{G}\,;\quad T = \frac{b}{G}\,;\quad U = \frac{c}{G}
\end{aligned}\right\}\ (20\text{-bis}).$$

Вставляя эти выраженія въ (19) и интегрируя [1]), получимъ выраженіе потенціальной энергіи для единицы объема:

---

[1]) Это интегрированіе производится безъ затрудненія; послѣ подстановки перемѣнныя или вполнѣ отдѣлены одна отъ другой, или соединены такъ, что имѣются двучлены вида

$$c\,.\,df + f\,.\,de$$

подобные двучлены очевидно представляютъ полный дифференціалъ произведенія

$$e\,.\,f$$

$$V = \frac{E}{2(1+k)} \cdot \left[\frac{1-k}{1-2k}(e^2+f^2+g^2) - \frac{2k}{1-2k}(ef+eg+gf)\right] +$$

$$+ \frac{G}{2}(a^2+b^2+c^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \; (21).$$

Другое выраженіе потенціальной энергіи. Вмѣсто этого можно получить потенціальную энергію въ другомъ видѣ, а именно въ зависимости не отъ измѣненій формы

$$e, \; f, \; g, \; a, \; b, \; c$$

а отъ силъ

$$P, \; Q, \; R, \; S, \; T, \; U.$$

Для этого слѣдуетъ выраженія (20) вставить въ уравненіе (21). Тогда получимъ:

$$V = \frac{1}{2E}\Big[(P^2+Q^2+R^2) - 2k(PQ+QR+RP)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2G}\Big[S^2+T^2+U^2\Big] \quad . \quad . \quad . \quad . \; (21\text{-bis}).$$

Разсмотрѣнный случай однороднаго измѣненія формы представляетъ особую важность для Теоріи Упругости. Такое значеніе его основано на томъ, что измѣненіе формы безконечно малаго элемента упругаго тѣла, въ самомъ общемъ случаѣ должно считаться однороднымъ, такъ какъ величины высшаго порядка должны быть отброшены. Поэтому полученныя нами формулы для V даютъ общее выраженіе потенціальной энергіи элемента тѣла, для всѣхъ возможныхъ случаевъ. Энергія всего тѣла получится, умножая V на объемъ элемента и интегрируя, причемъ это суммированіе должно быть распространено на весь объемъ тѣла [1]).

Свѣтовой эфиръ. Представимъ себѣ, что одна изъ частицъ этого тѣла, выведена изъ своего *естественнаго* положенія, которое считаемъ началомъ координатъ, и получила перемѣщеніе, опредѣляемое его проекціями

$$x, \; y, \; z.$$

Результатомъ этой деформаціи будетъ *напряженное* состояніе эфира и появленіе въ этой средѣ нѣкоторой потенціальной энергіи. Будемъ считать эфиръ упругимъ тѣломъ, аналогичнымъ твердымъ тѣламъ.

---

[1]) Формулы для потенціальной энергіи упругаго твердаго тѣла найдены Клапейрономъ.

Тогда потенціальная энергія его V выразится однородной функціей второй степени отъ координатъ, т. е.

$$V = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fzy.$$

Но извѣстными пріемами Аналитической Геометріи, измѣняя направленіе осей, можемъ уничтожить три послѣдніе члена этого выраженія, и представить V въ болѣе простой формѣ:

$$V = Ax^2 + By^2 + Cz^2.$$

Производныя отъ энергіи по координатамъ

$$x,\ y,\ z$$

дадутъ соотвѣтствующія силы, т. е. проекціи

$$X,\ Y,\ Z$$

той силы R, которая дѣйствуетъ на перемѣщенную частицу. Эти проекціи будутъ:

$$X = 2Ax$$
$$Y = 2By$$
$$Z = 2Cz$$

Если бы коеффиціенты

$$A,\ B,\ C$$

были равны между собою, то отношеніе проекцій силъ

$$X : Y : Z$$

было бы равно отношенію проекцій перемѣщенія нашей частицы

$$x : y : z.$$

Слѣдовательно въ этомъ частномъ случаѣ равнодѣйствующая R совпадала бы съ направленіемъ перемѣщенія частицы. Этотъ случай представляетъ явленія, происходящія въ тѣлахъ изотропныхъ и въ кристаллахъ правильной системы.

Въ общемъ случаѣ коеффиціенты

$$A,\ B,\ C$$

не равны между собою и слѣд. направленіе равнодѣйствующей R, *вообще говоря*, не совпадаетъ съ направленіемъ того перемѣщенія, которое ее вызвала. Но если перемѣщеніе направлено по одной изъ осей

$$X,\ Y,\ Z,$$

то равнодѣйствующая все таки совпадаетъ съ перемѣщеніемъ.

Развивая далѣе эти соображенія можно было бы вывести теорію двойнаго лучепреломленія въ кристаллахъ, не принадлежащихъ къ правильной системѣ.

42. Историческая замѣтка. Идея о потенціальной функціи принадлежитъ Лагранжу и была примѣнена имъ еще въ 1777 г. къ системѣ матеріальныхъ точекъ. Лапласъ пользовался этой функціей для сплошныхъ тѣлъ. Но оба эти математика не дали этой функціи особаго названія. Терминъ потенціальная функція введенъ Д. Гриномъ. Этому ученому принадлежатъ замѣчательныя примѣненія потенціальной функціи къ ученію объ электричествѣ [1]), и къ ученію объ упругихъ явленіяхъ. Послѣднему вопросу посвящены два его мемуара, касающіеся теоріи свѣта [2]). Въ нихъ потенціальная энергія выражена какъ функція второй степени отъ координатъ, изображающихъ упругія измѣненія.

Не слѣдуетъ удивляться тому, что такое, очень важное для твердыхъ тѣлъ ученіе, появляется въ мемуарахъ, посвященныхъ теоріи свѣта. Между свѣтовой теоріей и ученіемъ объ упругости твердыхъ тѣлъ существуетъ тѣсная связь. Она опредѣляется тѣмъ, что гипотетическій эфиръ по своимъ свойствамъ больше похожъ на твердое тѣло, чѣмъ на жидкость. Такъ напр. онъ передаетъ поперечныя колебанія, помощію касательныхъ упругихъ силъ, аналогичныхъ тѣмъ, которыя развиваются въ твердомъ тѣлѣ при сдвигѣ. А въ жидкости (идеальной) касательныя силы не могутъ проявиться; поэтому въ ней не могутъ произойти поперечныя колебанія.

43. Теорема Клапейрона. Такъ какъ потенціальная энергія упругихъ тѣлъ есть однородная функція перемѣнныхъ, то къ ней можно примѣнить извѣстную теорему Эйлера объ однородныхъ функціяхъ. То есть: если составить полный дифференціалъ этой функціи и въ немъ, вмѣсто дифференціаловъ перемѣнныхъ, поставить самыя перемѣнныя, то въ результатѣ получится первоначальная функція умноженная на степень однородности ея. Въ нашемъ случаѣ этотъ множитель будетъ *два*, и для потенціальной функціи V получимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cdot\varphi+\frac{\partial V}{\partial \psi}\cdot\psi+\frac{\partial V}{\partial \theta}\cdot\theta+\;.\;\;.\;\;.\;\;.=2\,V.$$

---

[1]) См. полное собраніе сочиненій Д. Грина. Mathematical Papers of the late George Green; первый мемуаръ этого сборника.

[2]) Въ томъ же полномъ собраніи мемуары: On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light. On the propagation of Light in crysttalised Media.

Но производныя

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial \psi}, \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdots$$

представляютъ собою силы

$$\Phi, \Psi, \Theta \ldots,$$

соотвѣтствующія перемѣннымъ

$$\varphi, \psi, \theta \ldots$$

Вставляя эти силы вмѣсто производныхъ въ предыдущее уравненіе получимъ:

$$\Phi\varphi + \Psi\psi + \Theta\theta + \ldots = 2V \ldots (22).$$

Это уравненіе въ нѣмецкихъ сочиненіяхъ называется теоремою Клапейрона. Оно выражаетъ собою тотъ общій законъ, что всегда потенціальная энергія вдвое меньше чѣмъ работа внѣшнихъ силъ, соотвѣтствующая положенію равновѣсія [1]).

Отсюда мы выводимъ такое слѣдствіе. Пусть нѣкоторыя внѣшнія силы будутъ *сразу* (мгновенно) приложены къ упругой системѣ въ ея естественномъ состояніи. Дойдя до положенія въ которомъ онѣ уравновѣшиваются съ внутренними силами, эти нагрузки произведутъ работу вдвое большую, чѣмъ накопившаяся внутренняя энергія. Слѣд. упругое тѣло не остановится въ этомъ положеніи, а движеніе его будетъ продолжаться пока перемѣщенія получатъ величины

$$2\varphi, 2\psi, 2\theta \ldots$$

Только тогда скорость частицъ системы обратится въ нуль. Затѣмъ начнутся колебанія, которыя постепенно потушатся дѣйствіемъ различныхъ сопротивленій. Наконецъ система придетъ въ покой, въ положеніи равновѣсія.

И такъ всякія силы, внезапно приложенныя къ упругой системѣ, вызовутъ въ первые моменты своего приложенія, измѣненія формы, вдвое большія, чѣмъ тѣ измѣненія, которыя соотвѣтствуютъ равновѣсію.

Частные случаи этого общаго закона, для растяженія, изгиба и т. п., извѣстны всѣмъ изъ ученія о Сопротивленіи Матеріаловъ.

44. Для примѣненія ученія о потенціальной энергіи къ нахожденію лишнихъ неизвѣстныхъ, сдѣлаемъ предварительно нѣсколько отдѣльныхъ поясненій.

---

[1]) Въ справедливости урав. (22) можно убѣдиться непосредственно, подстановкой въ него формулъ (8), не прибѣгая къ помощи теоремы Эйлера.

Лишнія неизвѣстныя. Прежде всего является вопросъ: куда должны причисляться лишнія неизвѣстныя силы? Къ числу силъ внутреннихъ, или къ внѣшнимъ силамъ?

Лишнія реакціи опоръ, конечно, должны причисляться къ внѣшнимъ силамъ. Опоры тогда можно отбросить, и замѣнить силами реакціи ихъ присутствіе и дѣйствіе на нашу упругую систему. Что-же касается до напряженій лишнихъ брусковъ, и другихъ лишнихъ частей системы, то на нихъ можно смотрѣть по произволу, и смотря по надобности двояко. Или причислять ихъ къ остальнымъ внутреннимъ напряженіямъ; тогда внутренняя энергія этихъ брусковъ или частей будетъ входить въ составъ потенціальной функціи V. Или можно отбросить лишнія части, замѣнивши ихъ дѣйствіе на систему соотвѣтствующими силами. Тогда эти лишнія силы должно причислить къ внѣшнимъ силамъ, и работа лишнихъ силъ должна присоединяться къ работамъ остальныхъ внѣшнихъ силъ.

Возможность смотрѣть на напряженія лишнихъ частей съ двойной точки зрѣнія: то считать ихъ внутренними, то—внѣшними силами, представляетъ особую характеристику этихъ напряженій и доставляетъ большія удобства при многихъ выводахъ и заключеніяхъ относительно лишнихъ неизвѣстныхъ.

45. Внутреннія напряженія. Какъ извѣстно, внутренними напряженіями называютъ тѣ силы, которыя представляютъ дѣйствіе упругой системы на какую нибудь выдѣленную часть этой системы. Эти силы позволяютъ намъ разсматривать избранную нами часть системы отдѣльно, какъ свободную; онѣ позволяютъ отбросить остальную систему, такъ какъ дѣйствіе ея на взятую нами часть вполнѣ замѣняется внутренними напряженіями.

Очевидно эти напряженія представляютъ, для выдѣленной нами части системы, *внѣшнія* силы, и все выше сказанное о внѣшнихъ силахъ относится и къ нимъ. Но теперь нужно взять потенціальную энергію *не всей* системы, а только выдѣленной нами части. Она будетъ функція второй степени тѣхъ координатъ, которыя опредѣляютъ положеніе или состояніе этой части. Производныя *этой* потенціальной функціи по ея перемѣннымъ дадутъ внѣшнія силы, и въ числѣ ихъ указанныя напряженія, внутреннія напряженія. Онѣ выразятся функціями первой степени отъ координатъ.

Для примѣра укажемъ на стропильную ферму съ затяжкой AB. (фиг. 26a). Напряженіе затяжки X есть лишняя неизвѣстная. Мы можемъ отбросить затяжку, и вмѣсто нея ввести двѣ противуположныя силы X (фиг. 26b), въ точкахъ A, B; тогда эти X будутъ внѣшнія силы. Сама затяжка, разсматриваемая отдѣльно (фиг. 26с) растягивается силами X', которыя равны и противуположны силамъ X; эти X' представляютъ для затяжки внѣшнія силы.

Здѣсь мы предположили, что затяжка соединена шарнерами съ точками фермы A, B; тогда затяжка только растягивается, и не изгибается Если бы соединенія въ точкахъ A и B были жесткія (фиг. 27а), то силы замѣняющія дѣйствіе ея на ферму состояли бы изъ силы X и пары M (фиг. 27b). Разсматривая затяжку отдѣльно, должны приложить къ ней по концамъ силы X' и пары M', равныя и противуположныя X и M.

46. Измѣненіе независимыхъ перемѣнныхъ. Иногда нужно замѣнить всѣ прежнія перемѣнныя или часть ихъ новыми, связанными съ первыми *линейной* зависимостью. Понятно, что при этомъ потенціальная энергія будетъ по прежнему функціей второй степени относительно координатъ; внѣшнія силы, также какъ и прежде, будутъ функціи первой степени отъ координатъ.

Для примѣра такой замѣны возьмемъ плоскую ферму, въ частяхъ которой нѣтъ изгиба, а только растяженіе и сжатіе. Независимыми перемѣнными, опредѣляющими ея состояніе можно считать, или перемѣщенія (вертикальныя и горизонтальныя) ея узловъ, или удлиненія ея необходимыхъ брусковъ. Выведемъ зависимость между такими удлиненіями и перемѣщеніями узловъ. Пусть AB (фиг. 28) одинъ изъ необходимыхъ брусковъ фермы, соединяющій узлы A и B. Положимъ, что узелъ A перемѣщается въ A', т. е. получаетъ перемѣщенія a и b по осямъ X и Y. Узелъ B получаетъ перемѣщенія a' и b', и переходитъ въ B'. При этомъ первоначальная длина бруска l превращается въ l', и брусокъ получаетъ удлиненіе

$$\Delta = l' - l.$$

Назовемъ черезъ α уголъ между AB и осью X. Сторонамъ многоугольника $ACA'B'C'B$ придадимъ направленія, означенныя на фигурѣ стрѣлками, и проектируемъ ихъ на направленіе AB. Такъ какъ измѣненіе формы весьма мало, то уголъ между l' и l очень малъ, и косинусъ его, съ точностью до величинъ второго порядка, можно считать единицей. При этомъ получимъ слѣдующее уравненіе проекцій:

$$l + a\ Cos\,\alpha + b\ Sin\,\alpha = a'\ Cos\,\alpha + b'\ Sin\,\alpha + l'$$

откуда

$$l' - l = \Delta = (a - a')\ Cos\,\alpha + (b - b')\ Sin\,\alpha \ldots\ldots (\alpha).$$

Подобныя же уравненія можно составить и для удлиненій Δ', Δ''..... всѣхъ остальныхъ необходимыхъ брусковъ фермы. Число новыхъ неизвѣстныхъ, т. е. число удлиненій Δ будетъ одинаковое съ числомъ прежнихъ неизвѣстныхъ, т. е. съ числомъ перемѣщеній узловъ. Въ этомъ мы можемъ убѣдиться слѣдующими соображеніями. Число перемѣщеній равно удвоенному числу узловъ, но такъ какъ одинъ конецъ фермы неподвиженъ, то оба перемѣщенія его извѣстны, т. е. равны нулю. Затѣмъ, такъ какъ другой конецъ фермы лежитъ на опорѣ, то одно изъ перемѣщеній его (нормальное къ опорѣ), тоже извѣстно, а именно равно нулю. Такимъ образомъ число неизвѣстныхъ перемѣщеній будетъ равно двойному числу узловъ безъ трехъ

$$2У - 3$$

Точно такое же будетъ и число новыхъ перемѣнныхъ, равное числу необходимыхъ брусковъ фермы, т. е. также

$$2У - 3.$$

Измѣненіе типа силъ. Перемѣна координатъ (т. е. перемѣна независимыхъ перемѣнныхъ, опредѣляющихъ состояніе тѣла) влечетъ за собою измѣненіе типа силъ. Послѣднія должны быть подобраны такъ, чтобы соотвѣтствовали принятымъ новымъ координатамъ. Такое соотвѣтствіе силы и координаты, напр. силы Φ и координаты φ, какъ мы уже говорили, означаетъ, что, въ выраженіи работы для безконечно малаго возможнаго перемѣщенія, сила Φ умножается на приращеніе координаты $d\varphi$, и даетъ членъ

$$\Phi \,.\, d\varphi.$$

Для лучшаго разъясненія вопроса объ измѣненіи типа силъ при измѣненіи системы координатъ, разсмотримъ въ подробности такую перемѣну координатъ, которая получается при *линейномъ преобразованіи*, т. е. когда прежнія координаты связаны съ новыми линейными зависимостями. Для прежнихъ координатъ беремъ обозначенія

$$\varphi,\ \psi,\ \theta\ .\ .\ .\ .\ ,$$

а для новыхъ—тѣ же буквы, но съ подстрочнымъ знакомъ «одинъ», т. е.

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \theta_1,\ .\ .\ .\ .$$

Такъ какъ мы назначили *линейное* преобразованіе, то прежнія координаты будутъ связаны съ новыми, посредствомъ слѣдующихъ формулъ:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = A\varphi_1 + B\psi_1 + C\theta_1 + \ldots \\ \psi = A'\varphi_1 + B'\psi_1 + C'\theta_1 + \ldots \\ \theta = A''\varphi_1 + B''\psi_1 + C''\theta_1 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (A)$$

Подобныя же обозначенія примемъ и для силъ. Прежнія силы, отвѣчающія координатамъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta\ .\ .\ .\ .$$

означали черезъ

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta\ .\ .\ .\ .$$

и элементарная работа ихъ выражалась суммою

$$\Phi\, d\varphi + \Psi\, d\psi + \Theta\, d\theta + \ .\ .\ .\ .\ (B)$$

Новыя же силы, отвѣчающія координатамъ

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \theta_1,\ .\ .\ .\ .$$

обозначимъ буквами

$$\Phi_1,\ \Psi_1,\ \Theta_1\ .\ .\ .\ .\ ;$$

ихъ нужно подобрать такъ, чтобы элементарная возможная работа изобразилась суммою:

$$\Phi_1\, d\varphi_1 + \Psi_1\, d\psi_1 + \Theta_1\, d\theta_1 + \ .\ .\ .\ .\ (C).$$

Возьмемъ формулы (A), продифференцируемъ ихъ, и результатъ вставимъ въ выраженіе (B). Тогда возможная работа силъ изобразится черезъ

$$\begin{aligned}
&\Phi\,(A\, d\varphi_1 + B\, d\psi_1 + C\, d\theta_1 + \ .\ .\ .\ .\ ) + \\
&+ \Psi\,(A'\, d\varphi_1 + B'\, d\psi_1 + C'\, d\theta_1 + \ .\ .\ .\ .\ ) + \\
&+ \Theta\,(A''\, d\varphi_1 + B''\, d\psi_1 + C''\, d\theta_1 + \ .\ .\ .\ .\ ) + \ .\ .\ .\ . = \\
&= (A\,\Phi + A'\,\Psi + A''\,\Theta + \ .\ .\ .\ .\ ) . d\varphi_1 + \\
&\quad (B\,\Phi + B'\,\Psi + B''\,\Theta + \ .\ .\ .\ .\ ) . d\psi_1 + \\
&\quad (C\,\Phi + C'\,\Psi + C''\,\Theta + \ .\ .\ .\ .\ ) . d\theta_1 + \ .\ .\ .\ .
\end{aligned}$$

Сравнивая послѣднее выраженіе съ уравненіемъ (C) получаемъ величины новыхъ силъ

$$\Phi_1,\ \Psi_1,\ \Theta_1,\ .\ .\ .\ .$$

въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= A\,\Phi + A'\,\Psi + A''\,\Theta + \ .\ .\ .\ . \\
\Psi_1 &= B\,\Phi + B'\,\Psi + B''\,\Theta + \ .\ .\ .\ . \\
\Theta_1 &= C\,\Phi + C'\,\Psi + C''\,\Theta + \ .\ .\ .\ . \\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .
\end{aligned}$$

Всѣ эти зависимости линейныя. И такъ: при линейномъ преобразованіи координатъ, силы новыхъ типовъ связаны съ прежними силами тоже линейными зависимостями.

Главныя координаты. Примѣняя линейное преобразованіе всегда можно такъ подобрать коеффиціенты

$$A,\ B,\ C,\ A', \ldots$$

что въ выраженіи для потенціальной энергіи обратятся въ нуль коеффиціенты у всѣхъ членовъ съ *произведеніями* координатъ; останутся только члены съ квадратами координатъ. Такія координаты называются *главными*. Они даютъ самое простое выраженіе для потенціальной энергіи.

Для примѣра возьмемъ плоскую ферму, безъ лишнихъ брусковъ, въ частяхъ которой вовсе нѣтъ изгиба. Состояніе этой системы опредѣляется удлиненіями Δ ея брусковъ. Эти удлиненія и будемъ считать координатами характеризующими состояніе системы. Тогда потенціальная энергія каждаго бруска представится членомъ вида

$$E\omega \cdot \frac{\Delta^2}{2l}.$$

Полная же потенціальная энергія всей фермы изобразится суммою членовъ такого вида. Въ нее вовсе не будутъ входить произведенія координатъ. Слѣд. выбранныя нами координаты—главныя.

ГЛАВА III.

Y - 53

Способъ Мора.

47. Начало возможныхъ перемѣщеній позволяетъ получить значительное число разнообразныхъ уравненій равновѣсія для упругихъ системъ. Это обиліе возможныхъ уравненій происходитъ оттого, что каждая упругая система имѣетъ множество возможныхъ перемѣщеній, т. е. измѣненій, дозволяемыхъ ея упругими связями. Каждая особая нагрузка даетъ для системы особое измѣненіе формы; слѣд. такихъ измѣненій имѣется множество. Всѣ они возможны; слѣд. работа всѣхъ силъ при *одной* какой нибудь заданной нагрузкѣ, должна быть равна нулю *для каждаго* изъ этихъ перемѣщеній, производимыхъ *другими* нагрузками.

Такимъ образомъ мы можемъ получить большое число различныхъ уравненій равновѣсія. Изъ нихъ можно выбрать тѣ, которыя намъ наиболѣе пригодны т. е. удобны для исключенія неизвѣстныхъ. Въ вопросахъ, которыми мы занимаемся, число неизвѣстныхъ можетъ быть довольно значительное: неизвѣстны перемѣщенія точекъ системы, неизвѣстны напряженія необходимыхъ частей; приходится искать напряженія лишнихъ частей; неизвѣстны реакціи опоръ, необходимыя и лишнія и всѣ эти величины связаны между собою, такъ что рѣшеніе приводится къ большому числу совокупныхъ уравненій. Прямое алгебрическое рѣшеніе ихъ очень утомительно, и часто должно считаться практически невыполнимымъ по своей продолжительности. Мы не можемъ уменьшить число неизвѣстныхъ, но возможно раздѣлить ихъ, такъ чтобы въ каждое уравненіе входила только одна или небольшое число неизвѣстныхъ, тогда уравненія легко разрѣшаются. Такое исключеніе и производится примѣненіемъ начала возможныхъ перемѣщеній, помощію надлежащаго выбора перемѣщеній. Въ этомъ и состоитъ пріемъ для опредѣленія лишнихъ неизвѣстныхъ, а также для нахожденія перемѣщеній, предложенный Моромъ.

48. Нѣсколько замѣчаній относительно примѣненія начала возможныхъ перемѣщеній къ нашему вопросу. Для правильнаго пониманія и вѣрнаго примѣненія начала возможныхъ перемѣщеній къ фермамъ, необходимо принять во вниманіе слѣдующія соображенія, опредѣляемыя сущностью и смысломъ этого общаго закона Статики:

a) Возможныя перемѣщенія, которыя входятъ въ выраженіе этого начала, должны считаться *между разсматриваемымъ положеніемъ равновѣсія, и какимъ нибудь другимъ къ нему безконечно близкимъ тоже возможнымъ положеніемъ системы.*

Одно изъ возможныхъ положеній системы есть то, которое отвѣчаетъ полному отсутствію внѣшнихъ силъ. Назовемъ его *нулевымъ* положеніемъ. Разсмотримъ сначала дѣйствіе на ферму какой нибудь системы внѣшнихъ силъ, которую назовемъ *первой*, и соотвѣтствующему ей положенію равновѣсія фермы тоже придадимъ эпитетъ *первое* положеніе. Затѣмъ вообразимъ себѣ какую нибудь другую систему внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ фермѣ; эту систему будемъ называть *второй*, а равновѣсное положеніе фермы, подъ дѣйствіемъ этой системы будемъ называть вторымъ положеніемъ. Тогда для *первой* нагрузки имѣемъ слѣдующія возможныя перемѣщенія: 1) изъ перваго положенія въ *нулевое;* оно можетъ быть замѣнено *обратнымъ* перемѣщеніемъ изъ нулевого положенія въ первое, что вызоветъ только измѣненіе знака перемѣщеній; 2) изъ *перваго* положенія во *второе.* Но если работа равна нулю для этихъ двухъ перемѣщеній въ отдѣльности, то она равна нулю и для ихъ геометрической суммы, т. е. для перемѣщенія *изъ нулевого положенія во второе.* Вотъ это послѣднее перемѣщеніе и будетъ примѣняться нами во всѣхъ приложеніяхъ начала возможныхъ перемѣщеній, излагаемыхъ въ настоящей главѣ. Мы всегда будемъ писать, что работа силъ *первой* системы, для перемѣщеній изъ нулевого положенія во *второе*, равна нулю.

b) *Въ началѣ возможныхъ перемѣщеній говорится о безконечно малыхъ перемѣщеніяхъ, но при изученіи равновѣсія упругихъ системъ, мы можемъ вмѣсто того ввести конечныя перемѣщенія.* Предположимъ сначала, что дѣйствуютъ безконечно малыя нагрузки, такъ что перемѣщенія, отвѣчающія переходу изъ *нулевого* положенія въ *первое*, безконечно малы. Пусть положеніе системы, названное *вторымъ*, также получается отъ *безконечно малыхъ* нагрузокъ.

Напишемъ, какъ только что было объяснено, уравненіе, выражающее, что работа силъ, получающихся при первомъ положеніи, для перемѣщеній втораго положенія, равна нулю. Затѣмъ помножимъ въ этомъ уравненіи всѣ силы, относящіяся къ первому положенію, на нѣкоторое большое число m; всѣ же перемѣщенія второго положенія умножимъ на нѣкоторое число n. Уравненіе останется по прежнему справедливымъ, какъ бы ни были велики числа m и n. Но такъ какъ зависимость между силами и перемѣщеніями у насъ всегда линейная, то мы можемъ дать этому уравненію слѣдующее толкованіе: силы, въ него входящія, будутъ тѣ, которыя отвѣчаютъ нагрузкамъ увеличеннымъ въ m разъ противъ первоначальнаго, и увеличивая это число m, мы можемъ перейти къ случаю конечныхъ нагрузокъ. Далѣе въ томъ же уравненіи всѣ перемѣщенія, увеличенныя въ n разъ, могутъ при возрастаніи числа n, сдѣлаться конечными. Эти перемѣщенія будутъ отвѣчать конечнымъ нагрузкамъ.

Слѣдовательно, примѣняя начало возможныхъ перемѣщеній къ упругимъ системамъ, мы можемъ считать *конечными*, какъ нагрузки отвѣчающія первому положенію, какъ и нагрузки отвѣчающія второму положенію системы.

Такой выводъ получается вслѣдствіе того, что силы представляются функціями первой степени отъ перемѣщеній. Другими словами это заключеніе, подобно всѣмъ нашимъ выводамъ, вытекаетъ изъ выраженія потенціальной энергіи упругихъ тѣлъ, имѣющей видъ однородной функціи второй степени.

49. Пріемъ Мора. Примѣняя способъ Мора мы будемъ имѣть дѣло съ двумя случаями дѣйствія силъ на одну и туже упругую систему. Эти случаи будемъ называть: первымъ и вторымъ; для обозначенія относящихся къ нимъ величинъ примѣняемъ подстрочные знаки 1 и 2. Мы выразимъ, что работа силъ (внѣшнихъ и внутреннихъ) перваго случая для перемѣщеній втораго случая равна нулю. Сохраняя по прежнему малыя греческія буквы для координатъ, а большія для силъ, получимъ работу внѣшнихъ силъ въ такомъ видѣ:

$$\Phi_1 \; \varphi_2 + \Psi_1 \; \psi_2 + \Theta_1 \; \theta_2 + \ldots \quad (23)$$

Что касается до работы внутреннихъ силъ, то она выразится или помощію потенціальной энергіи, или помощію силъ, замѣняющихъ связь этихъ частей съ остальною системою. Если эти силы связи будутъ

$$S, \; T, \; U, \ldots$$

а отвѣчающія имъ координаты

$$s, \; t, \; u, \ldots$$

то работа внутреннихъ силъ перваго случая для перемѣщеній втораго выразится черезъ:

$$-(S_1 \; s_2 + T_1 \; t_2 + U_1 \; u_2 + \ldots) \quad (24).$$

Присоединяя ее къ выраженію (23) должны получить нуль, т. е.:

$$\Phi_1 \;\varphi_2 + \Psi_1 \;\psi_2 + \;.\;.\;.\; - (S_1 \;s_2 + T_1 \;t_2 + U_1 \;u_2 + \;.\;.\;.\;) = 0, \;(25).$$

Случаи дѣйствія силъ, названныя нами первымъ и вторымъ, нужно подбирать такъ, чтобы возможно большее число неизвѣстныхъ исключилось и остались только тѣ, которыя намъ нужны. Если цѣль наша состоитъ въ разысканіи напряженій, то будемъ стараться исключать перемѣщенія. Когда пожелаемъ находить перемѣщенія, то будемъ стараться исключать напряженія.

Правило знаковъ. Сдѣлаемъ нѣсколько объясненій, полезныхъ для избѣжанія недоразумѣній и ошибокъ при составленіи работы напряженій. Мы будемъ поступать слѣдующимъ образомъ: разыскивая такую работу для извѣстной части фермы, мы начнемъ съ того, что отдѣлимъ эту часть отъ остальной системы, и замѣнимъ дѣйствіе отбрасываемой системы на нашу часть силами. Эти силы для избранной нами части должны считаться внѣшними: онѣ уравновѣшиваютъ напряженіе нашей части, а потому работа этихъ силъ связи для всякаго возможнаго перемѣщенія численно равна, а по знаку противуположна работѣ напряженій нашей части. И такъ, взявъ работу указанныхъ силъ связи съ противнымъ знакомъ, получимъ работу всѣхъ внутреннихъ напряженій нашей части.

Для частныхъ случаевъ растяженія, сжатія и изгиба полезно разъ на всегда условиться въ примѣненіи слѣдующихъ знаковъ для силъ связи: 1) растягивающія силы и удлиненія считаются положительными; 2) сжимающія силы и сжатіе считаются отрицательными; 3) моменты изгиба и углы поворота считаются положительными если они вращаютъ въ сторону часовой стрѣлки, и отрицательными въ случаѣ вращенія противъ часовой стрѣлки.

Такъ напр. если имѣемъ случай, когда сила связи T_1 растягивающая, то работа внутреннихъ напряженій нашей части для удлиненія Δ_2 выразится черезъ

$$-T_1 \,\Delta_2$$

Эту же формулу можно примѣнять и для сжимающихъ силъ, но тогда T_1 отрицательное. Если имѣемъ не удлиненіе, а уменьшеніе длины (сжатіе), то Δ_2 отрицательное. Такимъ образомъ эта формула общая, годная для всѣхъ случаевъ.

Подобнымъ же образомъ получаемъ для случая изгиба: если сила связи, дѣйствующая на нашу часть, изображается моментомъ M_1, а соотвѣтствующій уголъ поворота будетъ φ_2, то работа внутреннихъ силъ (напряженій) нашей части при соблюденіи указаннаго правила знаковъ представится всегда общей формулой

$$-M_1 \varphi_2.$$

Правила эти относятся и къ лишнимъ частямъ фермы, одинаково какъ въ томъ случаѣ, когда лишнія неизвѣстныя силы, отвѣчающія этимъ частямъ, причисляемъ къ внѣшнимъ силамъ, такъ и въ случаѣ если эти лишнія неизвѣстныя считаемъ внутренними силами.

50. Плоскія фермы безъ изгибаемыхъ частей. Пріемъ Мора лучше всего разъяснится на частномъ случаѣ. Разсмотримъ произвольную плоскую ферму, части которой не изгибаются, а только растягиваются и сжимаются. Сначала разберемъ вопросъ о нахожденіи лишнихъ неизвѣстныхъ силъ, а потомъ измѣненіе фигуры фермы.

Лишнія неизвѣстныя. Здѣсь онѣ могутъ быть двухъ родовъ: a) напряженія лишнихъ брусковъ фермы: мы ихъ будемъ означать буквами:

$$X,\ X',\ X'', \ldots .$$

b) лишнія реакціи опоръ; для нихъ примемъ обозначенія

$$Y,\ Y',\ Y'', \ldots .$$

Внѣшнія нагрузки на узлы

$$P,\ P',\ P'',$$

конечно должны быть даны. Также должны быть извѣстны длины и сѣченія всѣхъ брусковъ, какъ необходимыхъ, такъ и лишнихъ. Для первыхъ будемъ примѣнять буквы

l (длины) и ω (сѣченія).

А для лишнихъ брусковъ примѣнимъ большія буквы

L (длины) и Ω (сѣченія).

Для напряженій необходимыхъ брусковъ примѣняемъ букву T.

Прежде всего отбросимъ всѣ лишніе бруски, и лишнія опоры, и замѣнимъ ихъ соотвѣтствующими силами

$$Y,\ Y',\ Y'', \ldots .$$

$$X,\ X',\ X'' \ldots .$$

Напряженія T, необходимыхъ брусковъ будутъ происходить: во первыхъ отъ данныхъ нагрузокъ P, P'..... на узлы; во вторыхъ отъ лишнихъ силъ. Такъ какъ напряженія пропорціональны величинамъ нагрузокъ, и дѣйствія отдѣльныхъ силъ складываются, то получимъ вообще для T такое выраженіе:

$$T = T_0 + a X + a' X' + \dots + b Y + b' Y' + \dots \quad (26).$$

Здѣсь T_0 представляетъ напряженіе происходящее только отъ нагрузокъ

$$P, P', P'', \dots$$

въ предположеніи, что всѣ лишнія силы отброшены. Слѣд. T_0 легко опредѣляется для каждаго изъ необходимыхъ брусковъ.

Далѣе идутъ члены, которые представляютъ дѣйствіе каждой изъ лишнихъ силъ отдѣльно, и которые пропорціональны этимъ членамъ. Коеффиціенты пропорціональности легко могутъ быть опредѣлены по одиночкѣ. Для этого отдадимъ себѣ отчетъ въ томъ, какое реальное значеніе имѣютъ эти коеффиціенты, т. е. что они собою представляютъ?

Коеффиціентъ a представляетъ величину T для слѣдующаго частнаго значенія силъ:

$$X = 1,$$

т. е. одному килограмму, а всѣ прочія лишнія силы и всѣ нагрузки суть нули. Слѣд. a есть напряженіе бруска, получающееся для этого частнаго случая. Предположивъ дѣйствіе такой частной силы, нужно опредѣлить напряженія всѣхъ необходимыхъ брусковъ, и тогда получимъ для каждаго изъ нихъ коеффиціентъ a.

Другіе коеффиціенты найдутся подобнымъ же образомъ. Такъ a' представляетъ величину T_2, для случая когда

$$X' = 1^k,$$

а всѣ прочія лишнія силы и данныя нагрузки суть нули, и т. д.

Какъ величины T_0, такъ и коеффиціенты, a, a'.... b, b'.... всего лучше опредѣляются графически, помощію діаграммъ Мэксвелля. Нужно построить отдѣльно діаграммы: 1) для напряженій T_0, 2) для группы коеффиціентовъ a, т. е. для случая когда

$$X = 1$$

а всѣ прочія силы равны нулю; 3) для группы коеффиціентовъ a' и т. д.

Для избѣжанія недоразумѣній напомнимъ, что мы оперируемъ съ *обобщенными* силами. По этому говоря о случаѣ

сила $X = 1$

нужно подразумѣвать, что здѣсь имѣемъ *двѣ* равныя и прямопротивуположныя силы, замѣняющія отброшенный лишній брусокъ фермы. Если разсматриваемъ лишнюю реакцію опоры, и беремъ случай

$$Y = 1$$

то это означаетъ, что дѣйствуетъ такая группа силъ: въ лишней опорѣ сила равная единицѣ, и кромѣ того уравновѣшивающія ее реакціи необходимыхъ опоръ.

Такимъ образомъ для каждаго изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ имѣемъ группу силъ, находящихся въ равновѣсіи, и понятно, что для каждаго можетъ быть построена діаграмма.

51. Предыдущія объясненія представляютъ, такъ сказать, предварительное ознакомленіе съ фермой; изученіе ея свойствъ. Далѣе приступаемъ къ самому опредѣленію неизвѣстныхъ, по способу Мора. Для этого нужно взять два случая дѣйствія силъ: за первый примемъ тотъ случай когда одна изъ неизвѣстныхъ, напр. X, равна единицѣ, а всѣ прочія неизвѣстныя и всѣ данныя нагрузки отброшены. Въ качествѣ втораго случая намъ будетъ служить дѣйствительное, т. е. заданное, распредѣленіе нагрузокъ, вмѣстѣ со всѣми искомыми неизвѣстными. Мы напишемъ, что сумма работъ силъ внѣшнихъ и внутреннихъ равна нулю (урав. 25). Для того, что бы возможно яснѣе представить себѣ это уравненіе, составимъ слѣдующую таблицу величинъ перваго и втораго случаевъ:

Первый случай.	**Второй случай.**
Силы. k $X_k = \underline{\underline{1}}$	*Измѣненія формы или перемѣщенія.* Силѣ X отвѣчаетъ удлиненіе, производимое ею въ лишнемъ брускѣ: $\frac{X \cdot L}{E \cdot \Omega}$
Всѣ прочія неизвѣстныя X', X''.... Y', Y''.... и всѣ нагрузки на узлы равны нулю.	Удлиненія отвѣчающія такимъ силамъ не нужно опредѣлять, т. к. ихъ придется умножать на нули.
Реакціи необходимыхъ опоръ.	Эти опоры неподвижны, т. е. соотвѣтствующія имъ перемѣщенія суть нули.
Напряженія необходимыхъ брусковъ, т. е. величины a.	Напряженіямъ T_2 необходимыхъ брусковъ отвѣчаютъ ихъ удлиненія $\frac{T_2 \cdot l}{E \cdot \omega}$

Таблица эта показываетъ, что при составленіи нашего уравненія по образцу урав. 25, значительное число членовъ его обратится въ нуль. Это произойдетъ отчасти вслѣдствіе того, что силы лѣваго столбца суть нули (по этой причинѣ исчезнутъ всѣ члены, соотвѣтствующіе даннымъ нагрузкамъ; также исчезнутъ всѣ лишнія неизвѣстныя кромѣ одной X). Отчасти же исчезновеніе членовъ произойдетъ оттого, что въ правомъ столбцѣ соотвѣтствующія перемѣщенія суть нули (по этой причинѣ исчезаютъ реакціи необходимыхъ опоръ). Мы видимъ, что фиктивный случай дѣйствія силъ подобранъ такъ, чтобы исключить возможно большее число членовъ и упростить уравненіе. Окончательно оно получится въ такомъ видѣ:

$$-1^k \cdot \frac{X \cdot L}{E \cdot \Omega} - \underbrace{\Sigma a}\frac{T_2 l}{E\omega} = 0 \ . \ . \ . \quad (27)$$

гдѣ знакъ

$$\Sigma$$

означаетъ сумму распространенную на всѣ необходимые бруски. Сюда нужно вставить значеніе (26) для T_2:

$$T_2 = T_0 + a\,X + a'\,X' + \ . \ . \ . \ . + b\,Y + b'\,Y' + \ . \ . \ . \ .$$

Повторяя для силы X', то что мы дѣлали для X, получимъ уравненіе отвѣчающее (27) и очень на него похожее. Такія же уравненія получимъ и для всѣхъ остальныхъ напряженій лишнихъ брусковъ.

52. Лишнія реакціи опоръ. Составленіе уравненій для лишнихъ реакцій опоръ

$$Y,\ Y',\ Y'' \ . \ . \ . \ .$$

почти ничѣмъ не отличается отъ порядка полученія урав. (27). Мы должны взять въ качествѣ перваго случая дѣйствія силъ, такую фиктивную нагрузку:

$$Y = 1,$$

а всѣ прочія лишнія неизвѣстныя и всѣ нагрузки на узлы считаемъ нулями.

Этой нагрузкѣ перваго случая отвѣчаетъ перемѣщеніе, идущее по направленію Y. Но оно во второмъ случаѣ—дѣйствительной нагрузки—равно нулю, такъ какъ опоры неподвижны. Слѣд. членъ общаго уравненія (25), отвѣчающій силѣ Y, исчезаетъ. Что касается напряженій необходимыхъ брусковъ, то теперь, для случая названнаго первымъ, они будутъ представляться коеффиціентомъ b формулы (26). Окончательно получимъ уравненіе:

$$\Sigma b \frac{T_2 l}{E\omega} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \ (28).$$

гдѣ должно быть подставлено для T_2 его выраженіе (26).

Такія же уравненія мы получимъ и для всѣхъ другихъ реакцій

$$Y', \ Y'' \ . \ . \ . \ .$$

Окончательно имѣемъ столько уравненій вида (27) и (28) сколько у насъ въ вопросѣ лишнихъ неизвѣстныхъ

$$X, \ X', \ . \ . \ . \ .$$
$$Y, \ Y', \ . \ . \ . \ .$$

и притомъ всѣ уравненія первой степени. Такимъ образомъ получаемъ вполнѣ опредѣленное рѣшеніе.

Изъ этихъ объясненій видно, что въ рѣшеніи Мора совершенно раздѣлены два вопроса: a) нахожденіе *необходимыхъ* реакцій и напряженій *необходимыхъ* брусковъ. b) нахожденіе *лишнихъ* реакцій и напряженій лишнихъ брусковъ. Вслѣдствіе такого раздѣленія, число связанныхъ между собою совокупныхъ уравненій значительно меньше, чѣмъ то число ихъ, которое получилось бы если бы мы рѣшали эти два вопроса одновременно.

53. Частные примѣры. Арочная стропильная ферма съ затяжкой. (Фиг. 29). Затяжка AB представляетъ единственную лишнюю линію этой фермы; всѣ прочія части необходимы для жесткости. Такимъ образомъ здѣсь имѣемъ случай, когда всего одна лишняя неизвѣстная—натяженіе затяжки X. Напряженіе какой-нибудь другой, любой части фермы назовемъ буквою T.

Силы T можно считать состоящими изъ двухъ частей; первая получается вслѣдствіе внѣшнихъ нагрузокъ P, вмѣстѣ съ уравновѣшивающими ихъ давленіями опоръ A и B, причемъ мы будемъ считать, что затяжки AB вовсе нѣтъ. Вторая часть получится вслѣдствіе силъ X, дѣйствующихъ по концамъ затяжки, при чемъ всѣ внѣшнія нагрузки нужно отбросить. Полное натяженіе T будетъ состоять изъ алгебраической суммы этихъ двухъ частей T_0 и mX. Полная величина T будетъ

$$T = T_0 + mX.$$

Величины T_0 и m проще всего находятся построеніемъ взаимныхъ діаграммъ. Нужно построить двѣ діаграммы:

одну для случая $X=0$. Она дастъ величины T_0.

другую для случая $X=1$, причемъ нужно отбросить всѣ нагрузки P; эта діаграмма дастъ величины m.

Для нахожденія X примѣнимъ формулу (27). Здѣсь фиктивный случай (первый) силъ приводится къ двумъ равнымъ и прямопротивуположнымъ силамъ, равнымъ единицѣ, и приложеннымъ въ точкахъ A и B вдоль затяжки. Если назовемъ черезъ L, Ω длину и площадь затяжки, а черезъ l, ω—тѣ же величины для остальныхъ частей фермы, то формула (27) дастъ намъ:

$$-\frac{X \,.\, L}{E\Omega} - \Sigma\, m \frac{l}{E\omega} \cdot (T_0 + mX) = 0$$

откуда находимъ X.

54. Другой частный примѣръ. *Ферма (фиг. 30) лежитъ на четырехъ опорахъ; всѣ онѣ на одной высотѣ. Найти давленія опоръ.*

Здѣсь имѣемъ двѣ лишнія неизвѣстныя, за которыя примемъ давленія X, Y среднихъ опоръ. Для нахожденія ихъ нужно составить два уравненія.

Вообразимъ себѣ такую фиктивную нагрузку: отбросимъ опоры B, C и пусть въ точкѣ B дѣйствуетъ внизъ вертикальная сила, равная единицѣ, и уравновѣшивающаяся реакціями крайнихъ опоръ A, D. Напишемъ уравненіе возможныхъ перемѣщеній для этой фиктивной нагрузки, и для истинныхъ перемѣщеній фермы, вызываемыхъ дѣйствительной нагрузкой.

Напряженіе какого нибудь бруска фермы отъ фиктивной нагрузки назовемъ черезъ t, а напряженіе его отъ дѣйствительной нагрузки черезъ T. Послѣдняя величина зависитъ отъ внѣшнихъ нагрузокъ P, P', P'' и давленій опоръ; она представится формулою вида:

$$T = aP + bP' + \ldots\ldots + \alpha X + \beta Y \text{ [1]}$$

Тогда наше уравненіе (28) даетъ:

$$\Sigma\, t\,(aP + bP' + \ldots\ldots + \alpha X + \beta Y)\frac{l}{E\omega} = 0 \;\ldots\ldots (29)$$

Затѣмъ вообразимъ другую фиктивную нагрузку, состоящую изъ вертикальной силы равной единицѣ, приложенной въ C и направленной внизъ, и уравновѣшивающихъ ее давленій опоръ A, D. На-

[1]) При нахожденіи величинъ T давленія крайнихъ опоръ A, D должны быть выражены въ зависимости отъ нагрузокъ P, P'.... и силъ X, Y. Эти выраженія мы получимъ, написавъ условія равновѣсія всей фермы.

пряженія, вызываемыя въ брускахъ фермы такой нагрузкой, назовемъ черезъ s. Примѣняя уравненіе (28) получимъ:

$$\Sigma s (aP + bP' + \ldots + \alpha X + \beta Y) \frac{l}{E\omega} = 0 \ldots (30)$$

Два уравненія (29) и (30) позволяютъ найти двѣ неизвѣстныя X, Y.

55. Перемѣщенія узловъ плоской фермы, въ частяхъ которой вовсе нѣтъ изгиба. Этотъ вопросъ рѣшается Моромъ при помощи такого же пріема, какъ и нахожденіе лишнихъ неизвѣстныхъ. Опять нужно разсматривать два случая дѣйствія силъ: дѣйствительный т. е. заданный, и фиктивный, нами придуманный. Мы будемъ примѣнять уравненіе (25) къ перемѣщеніямъ дѣйствительнаго случая, и силамъ фиктивнаго. Этотъ послѣдній нужно подобрать такъ, что бы исключить возможно большее число членовъ уравненія (25).

Правило для назначенія такого фиктивнаго случая заключается въ слѣдующемъ: если ищемъ перемѣщеніе

$$\varphi,$$

то фиктивная нагрузка должна состоять изъ силы

$$\Phi$$

соотвѣтствующей φ, [1]) а величина этой силы должна быть единица. Всѣ же остальныя внѣшнія нагрузки должны быть отброшены. Также нужно отбросить всѣ напряженія лишнихъ брусковъ, и всѣ реакціи. Конечно остаются тѣ необходимыя реакціи опоръ, которыя могутъ быть иногда нужны для уравновѣшенія фиктивной нагрузки, но мы ихъ считаемъ включенными въ составъ обобщенной силы, т. е. группы

$$\Phi.$$

Составимъ подобно предыдущему таблицу силъ 1-го случая и перемѣщеній втораго.

Первый случай.	**Второй случай.**
Силы.	*Перемѣщенія.*
$\Phi_1 = 1$	φ_2
Всѣ нагрузки P, всѣ напряженія лишнихъ брусковъ, и всѣ лишнія реакціи опоръ равны нулю.	Такъ какъ эти силы равны нулю, то нѣтъ надобности опредѣлять соотвѣтствующія перемѣщенія.
Реакціи необходимыхъ опоръ.	Опоры неподвижны, т. е. перемѣщенія ихъ нули.

[1]) Т. е. умножающейся на φ въ выраженіи работы силъ для возможныхъ перемѣщеній.

Напряженія необходимыхъ брусковъ фермы T_1.

Удлиненія этихъ брусковъ, опредѣляются по формулѣ

$$\Delta_2 = T_2 \cdot \frac{l}{E\omega},$$

гдѣ T_2 есть напряженіе для втораго случая.

Изъ этой таблицы видно, что значительное число членовъ урав. (25) исключается: отчасти потому, что силы лѣваго столбца нули, отчасти потому, что перемѣщенія праваго столбца нули. Окончательно уравненіе получитъ видъ:

$$1 \cdot \varphi_2 - \Sigma\, T_1\, T_2 \frac{l}{E\omega} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

гдѣ знакъ Σ означаетъ сумму распространенную на *всѣ необходимые бруски*.

Напряженія T_1 для фиктивнаго случая легко опредѣляются, построивъ для него діаграмму Мэксвелля. Что касается T_2, то это тѣ же дѣйствительныя напряженія, о которыхъ мы говорили въ n^0 50: они представляются формулой (26)

$$T_2 = T_0 + a\,X + a'\,X' + \quad . \quad . \quad . + b\,Y + b'\,Y' + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Чтобы знать ихъ, необходимо предварительно опредѣлить всѣ лишнія неизвѣстныя.

Послѣ того наше искомое перемѣщеніе φ_2 найдется изъ уравненія (31).

56. Замѣчаніе касательно нахожденія перемѣщеній. Эти перемѣщенія могутъ быть различнаго характера или типа и сообразно съ этимъ долженъ быть измѣняемъ характеръ или типъ фиктивной силы

$$\Phi_1.$$

Напр. если мы желаемъ опредѣлить вертикальное перемѣщеніе какого нибудь узла m фермы (фиг. 31), то фиктивная сила должна состоять изъ вертикальной силы въ 1 кил., приложенной въ этомъ узлѣ, и уравновѣшивающихъ ее необходимыхъ реакцій опоръ A и B. Для этого случая и должны быть опредѣлены напряженія необходимыхъ брусковъ, названныя нами буквою T_1.

Если желаемъ найти горизонтальное перемѣщеніе узла n фермы, (фиг. 32) то фиктивная нагрузка должна состоять изъ горизонтальной силы, равной единицѣ, приложенной въ узлѣ n, и изъ реакцій опоръ A и B, уравновѣшивающихъ эту горизонтальную силу. Для этой нагрузки опредѣляются напряженія T_1.

Если мы желаемъ найти уголъ φ_2, на который повернется одинъ изъ брусковъ фермы, напр. *mn* (фиг. 33) относительно линіи опоръ AB, то фиктивная нагрузка Φ_1 должна представлять пару силъ, приложенную къ бруску *mn* и уравновѣшиваемую реакціями опоръ A, B. Моментъ этой пары нужно взять равнымъ единицѣ. Для этой нагрузки опредѣляются напряженія, названныя въ формулѣ (31) буквою T_1.

57. Приведемъ еще примѣръ. Положимъ, что мы желаемъ опредѣлить измѣненіе угла α между двумя брусками *mn*, *pq* нашей фермы (фиг. 34). Это измѣненіе будетъ представляться буквою φ_2 общей формулы (31). *Фиктивная сила* Φ_1, въ этомъ случаѣ должна состоять изъ двухъ паръ, съ моментами равными единицѣ, приложенныхъ къ брускамъ *mn* и *pq*, и взаимно уравновѣшивающихся. Реакціи опоръ A и B при этомъ будутъ нули. Для такой фиктивной нагрузки нужно опредѣлить напряженія брусковъ фермы; они представятъ T_1 нашей общей формулы. Очевидно, что въ случаѣ, представленномъ на фигурѣ, часть фермы, лежащая лѣвѣе *mn*, и часть ея лежащая правѣе *pq*, вовсе не напряжены.

58 Замѣчанія по поводу этого пріема нахожденія измѣненія фигуры плоской фермы. Изъ нашихъ объясненій видно, что въ формулѣ (31) подъ знакомъ Σ входятъ только члены, отвѣчающіе *необходимымъ* брускамъ фермы. *Лишніе* бруски не должны приниматься во вниманіе при составленіи такой суммы. Это однако не означаетъ, что измѣненіе фигуры вовсе не зависитъ отъ присутствія лишнихъ брусковъ. Вліяніе ихъ проявляется тѣмъ, что въ формулу (31) входятъ величины

$$T_2,$$

которыя, какъ показываетъ уравненіе (32), зависятъ отъ лишнихъ неизвѣстныхъ.

Сущность дѣла заключается въ томъ, что измѣненіе фигуры фермы вполнѣ опредѣляется удлиненіями необходимыхъ брусковъ. Но эти удлиненія зависятъ отъ напряженій лишнихъ брусковъ. Этимъ все объясняется: и отсутствіе подъ знакомъ Σ членовъ, отвѣчающихъ лишнимъ брускамъ, и вліяніе лишнихъ неизвѣстныхъ на члены

$$T_2 \cdot \frac{l}{E\omega},$$

которые представляютъ удлиненія необходимыхъ брусковъ.

59. Геометрическій характеръ вопроса. Изложенный пріемъ представляетъ собою нахожденіе перемѣщеній по даннымъ удлиненіямъ брусковъ. Это чисто геометрическая задача, но она рѣшена при помощи Статики, доставляющей здѣсь, какъ и во многихъ другихъ случаяхъ, самое простое рѣшеніе. Это одинъ изъ примѣровъ тѣхъ взаимныхъ услугъ Статики и Геометріи, о которыхъ говорилъ еще Мöбіусъ.

60. Частныя задачи. Пусть дана ферма (фиг. 35), съ параллельными поясами, и діагоналями, наклоненными вездѣ подъ угломъ 45° къ горизонту. Внѣшняя нагрузка дѣйствуетъ одинаково на всѣ нижніе узлы. Требуется опредѣлить пониженіе срединнаго узла m нижняго пояса.

Бруски одной половины фермы означимъ нумерами отъ 1 до 15; другая половина будетъ представлять повтореніе первой, такъ что всѣ натяженія нужно будетъ брать два раза, кромѣ того, которое относится къ бруску 15.

Здѣсь фиктивная нагрузка должна состоять изъ вертикальной силы, равной единицѣ, приложенной въ узлѣ m, съ присовокупленіемъ уравновѣшивающихъ ее давленій опоръ.

Не трудно видѣть, что въ этой задачѣ истинная нагрузка и фиктивная сила будутъ вызывать въ каждомъ брускѣ натяженія одинаковаго знака. Поэтому T_1 и T_2, отвѣчающіе одному и тому же бруску, имѣютъ одинаковые знаки, слѣд., всѣ члены суммы положительные. Это позволяетъ намъ не опредѣлять знаковъ T_1 и T_2, и мы ограничимся нахожденіемъ ихъ численныхъ величинъ. Пользуясь методой Риттера, получимъ величины, выписанныя въ слѣдующей таблицѣ:

№№ брусковъ.	T_2	T_1
1	$3{,}5P$	$0{,}5$
2	$3{,}5P\sqrt{2}$	$0{,}5\sqrt{2}$
3	$3{,}5P$	$0{,}5$
4	$3{,}5P$	$0{,}5$
5	$2{,}5P\sqrt{2}$	$0{,}5\sqrt{2}$
6	$6P$	1
7	$2{,}5P$	$0{,}5$
8	$6P$	1
9	$1{,}5P\sqrt{2}$	$0{,}5\sqrt{2}$
10	$7{,}5P$	$1{,}5$
11	$1{,}5P$	$0{,}5$
12	$7{,}5P$	$1{,}5$
13	$0{,}5P\sqrt{2}$	$0{,}5\sqrt{2}$
14	$8P$	2
15	P	1

Величины

$$\frac{l}{E\omega}$$

для отдѣльныхъ брусковъ, т. е. удлиненія, ими получаемыя отъ силы въ 1 килограммъ, назовемъ черезъ

$$\Delta_1, \Delta_2 \ldots \ldots \Delta_{15}$$

Тогда получаемъ пониженіе узла по формулѣ

$$\delta = \Sigma\, T_1\, T_2 \frac{l}{E\omega} = P \cdot \Big\{ 3{,}5\, \Delta + 7\, \Delta_2 + 3{,}5\, \Delta_3 + 3{,}5\, \Delta_4 + 5\, \Delta_5 +$$
$$+ 12\, \Delta_6 + 2{,}5\, \Delta_7 + 12\, \Delta_8 + 3\, \Delta_9 + 22{,}5\, \Delta_{10} + 1{,}5\, \Delta_{11} + 22{,}5\, \Delta_{12} +$$
$$+ \Delta_{13} + 32\, \Delta_{14} + \Delta_{15}. \Big\}$$

Найти для данной нагрузки измѣненіе угла α одного изъ треугольниковъ фермы. (фиг. 37).

Фиктивная нагрузка должна состоять изъ двухъ паръ приложенныхъ къ сторонамъ AB, AC угла α. Каждая пара должна быть равна единицѣ. Такая нагрузка вызываетъ напряженія только въ брускахъ 1, 2, 3 треугольника ABC; напряженія же остальныхъ брусковъ будутъ нули. Поэтому сумма, находящаяся во второмъ членѣ уравненія (31), будетъ состоять только изъ трехъ членовъ, отвѣчающихъ брускамъ 1, 2, 3. Называя истинныя удлиненія ихъ черезъ Δ_1, Δ_2, Δ_3, а напряженія отъ фиктивной нагрузки черезъ S_1, S_2, S_3, получимъ:

$$\Delta\alpha = S_1\, \Delta_1 + S_2\, \Delta_2 + S_3\, \Delta_3.$$

Эта формула представляетъ полученное при помощи Статики, рѣшеніе чисто геометрической задачи: найти измѣненіе угла треугольника, которое получается вслѣдствіе очень малыхъ измѣненій длинъ трехъ его сторонъ.

61. Случаи когда есть изгибъ. Внутреннія силы при изгибѣ, если пренебречь касательными напряженіями, приводятся къ изгибающему моменту

$$M.$$

Координата, отвѣчающая этой силѣ есть уголъ φ, на который поворачивается поперечное сѣченіе. По этому выраженіе для работы означенной силы будетъ

$$M \,.\, \varphi.$$

Мы напомнили въ n^0 37, что между M и φ существуетъ, для кругового изгиба, зависимость

$$\varphi = \frac{M}{EI} \cdot l$$

гдѣ l—длина тѣла. Если изгибъ не круговой, то эту формулу нужно примѣнять только къ элементарной части изгибаемаго бруска, т. е. къ безконечно малой длинѣ ∂x.

Чтобы показать какъ примѣняется способъ Мора къ случаямъ, когда есть изгибъ, вообразимъ два случая дѣйствія силъ—первый и второй—и обозначимъ соотвѣтствующія имъ величины моментовъ изгиба черезъ

$$M_1 \text{ и } M_2.$$

Для элемента ∂x бруска будетъ

$$\varphi_2 = \frac{M_2}{EI} \cdot \partial x$$

Работа силъ перваго случая для перемѣщеній втораго будетъ

$$M_1 \cdot \varphi_2 = \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} \cdot \partial x$$

Это относится къ элементу бруска, а для всего бруска получимъ выраженіе работы интегрируя предыдущее по всей длинѣ его. Она будетъ

$$\int_0^l \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} \cdot \partial x$$

и должна быть взята съ отрицательнымъ знакомъ.

Подобныя выраженія работы внутреннихъ силъ должны быть введены для каждаго изъ изгибаемыхъ брусковъ нашей системы. Затѣмъ составленіе уравненія и примѣненіе его къ нахожденію лишнихъ неизвѣстныхъ ничѣмъ неотличаются отъ предыдущаго.

62. Примѣръ. Брусокъ однимъ концомъ закрѣпленъ, а другой конецъ его лежитъ на опорѣ A, которая на Δ превышаетъ горизонтъ правой опоры. Найти давленіе X лѣвой опоры, при заданныхъ нагрузкахъ

$$P, \; Q, \; R \; . \; . \; .$$

Данный случай дѣйствія силъ (фиг. 36a) будемъ считать вторымъ, и моменты изгиба для него означаемъ буквою

$$M_2.$$

Затѣмъ вообразимъ себѣ фиктивный случай дѣйствія силъ. представленный на фиг. 36b; здѣсь только одна внѣшняя сила равная единицѣ, и приложенная въ лѣвой опорной точкѣ. Этотъ случай называемъ первымъ и моменты изгиба для него означаемъ черезъ

$$M_1.$$

Примѣнимъ способъ Мора къ силамъ перваго случая и перемѣщеніямъ втораго. Изъ внѣшнихъ силъ имѣемъ одну силу

$$X = 1$$

и работа ея будетъ

$$1 \,.\, \Delta.$$

Работа внутреннихъ силъ представится выраженіемъ

$$-\int_0^l \frac{M_1 \,.\, M_2}{EI} \cdot \partial x$$

Слѣдовательно получаемъ уравненіе

$$\Delta - \int_0^l \frac{M_1 \,.\, M_2}{EI} \cdot \partial x = 0$$

Моменты M_1 для разныхъ точекъ бруска будутъ

$$1 \,.\, x$$

Что касается момента M_2, то его можно получить какъ сумму двухъ частей: a) момента изгиба отъ нагрузокъ

$$P,\ Q,\ R,$$

когда лѣвая опора отброшена; эту часть назовемъ

$$M_0.$$

b) момента отъ давленія X; эта часть будетъ

$$X \,.\, x$$

Слѣд.

$$M_2 = M_0 + Xx.$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе, получимъ:

$$\Delta - \int_0^l \frac{x \,.\, (M_0 + Xx)}{EI} \cdot \partial x = 0$$

или

$$\Delta - \int_0^l \frac{M_0 x \,.\, \partial x}{EI} - X \int_0^l \frac{x^2 \,.\, \partial x}{EI} \cdot = 0$$

При постоянномъ поперечномъ сѣченіи бруска имѣемъ

$$\int_0^l \frac{x^2 \,.\, \partial x}{EI} = \frac{l^3}{3EI}$$

Величина

$$\int_0^l \frac{M_0 x \,.\, \partial x}{EI}$$

можетъ быть найдена, когда вполнѣ заданы нагрузки.

Такимъ образомъ наше уравненіе позволяетъ найти X.

ГЛАВА IV.

Теорема взаимности.

63. Для вывода этой важной теоремы предположимъ, также какъ въ предыдущей главѣ, что имѣемъ два различныхъ состоянія упругой системы, первое и второе, отвѣчающія двумъ различнымъ нагрузкамъ. Затѣмъ напишемъ работу внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ при первомъ состояніи, для перемѣщеній втораго состоянія.

Для этого возьмемъ общія выраженія внѣшнихъ силъ (глава II, форм. 8).

$$\Phi = 2a\,\varphi + a'\,\psi + b'\,\theta + \ldots.$$

$$\Psi = a'\,\varphi + 2b\,\psi + c'\,\theta + \ldots.$$

$$\Theta = b'\,\varphi + c'\,\psi + 2c\,\theta + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Величины, относящіяся къ первому состоянію упругой системы, будемъ обозначать подстрочнымъ знакомъ 1, а для втораго состоянія примемъ подстрочный знакъ 2. Тогда работа внѣшнихъ силъ перваго случая для перемѣщеній втораго случая будетъ

$$\mathbf{\Phi}_1\,\varphi_2 + \mathbf{\Psi}_1\,\psi_2 + \mathbf{\Theta}_1\,\theta_2 + \ldots. =$$
$$= 2a\,\varphi_1\,\varphi_2 + a'\,(\psi_1\,\varphi_2 + \varphi_1\,\psi_2) + 2b\,\psi^2 +$$
$$+ b'\,(\theta_1\,\varphi_2 + \varphi_1\,\theta_2) + 2c\,\theta^2 + c'\,(\theta_1\,\psi_2 + \theta_2\,\psi_1) + \ldots. \quad (33).$$

Замѣтимъ, что выраженіе, находящееся во второй части равенства, совершенно симметрично относительно координатъ перваго и втораго состояній; координаты со знакомъ 1 и координаты со знакомъ 2 входятъ въ это выраженіе совершенно одинаковымъ образомъ. Отсюда получается слѣдствіе: если составимъ обратно работу внѣшнихъ силъ втораго состоянія для перемѣщеній перваго состоянія, т. е.

$$\mathbf{\Phi}_2\,\varphi_1 + \mathbf{\Psi}_2\,\psi_1 + \mathbf{\Theta}_2\,\theta_1 + \ldots.$$

то послѣ подстановки выраженій для силъ (8), получимъ результатъ совершенно тождественный со второй частью уравненія (33). По этому заключаемъ, что должно быть равенство

$$\Phi_1 \varphi_2 + \Psi_1 \psi_2 + \Theta_1 \theta_2 + \ldots . =$$
$$= \Phi_2 \varphi_1 + \Psi_2 \psi_1 + \Theta_2 \theta_1 + \ldots \ldots , \ldots . \quad (34)$$

которое и представляетъ теорему взаимности. Оно говоритъ, что работа внѣшнихъ силъ перваго состоянія для перемѣщеній втораго состоянія равна обратному выраженію, т. е. работѣ силъ втораго состоянія для перемѣщеній перваго состоянія.

64. Внутреннія силы вовсе не входятъ въ эту теорему, такъ что составляя ее, мы исключили очень большое число неизвѣстныхъ—всѣ внутреннія силы. Такое исключеніе значительнаго числа неизвѣстныхъ, входящихъ въ вопросъ, и дѣлаетъ эту теорему очень полезной.

Путь, посредствомъ котораго произошло такое исключеніе, легко объясняется. Выраженіе, стоящее во второй части уравненія (33), (если его взять съ отрицательнымъ знакомъ) представляетъ собою работу внутреннихъ силъ. Такимъ образомъ уравненіе это есть ничто иное какъ одинъ изъ видовъ начала возможныхъ перемѣщеній. Оно выражаетъ, что работа внѣшнихъ силъ численно равна, а по знаку противуположна работѣ внутреннихъ силъ.

Мы написали такія уравненія, выражающія начало возможныхъ перемѣщеній, два раза: первый разъ для силъ перваго случая и перемѣщеній втораго случая; а второй разъ обратно для силъ втораго случая и перемѣщеній перваго. Въ этихъ двухъ уравненіяхъ вторыя части ихъ оказались одинаковыми; отсюда мы заключили о равенствѣ лѣвыхъ частей уравненій. Въ этомъ и состоитъ наша теорема.

И такъ выводя ее мы пользуемся во первыхъ началомъ возможныхъ перемѣщеній, а во вторыхъ выраженіемъ для потенціальной энергіи упругаго тѣла, слѣдствіемъ котораго получается то, что внѣшнія силы представляются функціями первой степени отъ координатъ. Теорема наша тѣсно связана съ формой потенціальной энергіи, и есть прямое слѣдствіе того, что V есть *однородная* функція *второй* степени.

65. Теоремы взаимности въ другихъ областяхъ Механики. Приведенныя соображенія объясняютъ почему теоремы, совершенно сходныя съ доказанной, встрѣчаются также и во многихъ другихъ областяхъ науки, напр. въ Общей Динамикѣ, Акустикѣ. Появленіе теоремы взаимности связано съ существованіемъ въ вопросѣ нѣкоторой однородной функціи втораго порядка; гдѣ фигурируетъ такая функція, тамъ и получается указанное взаимное соотношеніе.

Напр. въ Динамикѣ основаніемъ выводовъ касательно движенія, сообщаемаго мгновенными силами, служитъ выраженіе для живой силы, которая есть однородная функція второй степени отъ скоростей. Эта функція соотвѣтствуетъ нашей V. Производныя отъ живой силы по скоростямъ даютъ импульсы силъ [1]); они соотвѣтствуютъ нашимъ силамъ

$$\Phi, \ \Psi, \ \Theta \ . \ . \ . \ .$$

Между импульсами и скоростями для двухъ разныхъ движеній получается зависимость совершенно тождественная съ (34).

Въ Акустикѣ взаимныя отношенія встрѣчаются неоднократно, и Гельмгольцъ по этому поводу дѣлаетъ слѣдующее важное замѣчаніе: если какія либо явленія окажутся не подчиненными закону взаимности, то это служитъ доказательствомъ, что они опредѣляются не упругими силами, т. е. не такими силами, потенціальная функція которыхъ есть однородная функція 2-й степени, а какими нибудь силами другаго рода.

66. Значеніе теоремы взаимности и разнообразіе формъ ея. Мы уже видѣли, что всѣ внутреннія силы исключаются изъ уравненія (34). Что же касается лишнихъ неизвѣстныхъ, то, причисляя ихъ къ внѣшнимъ силамъ, мы можемъ сохранить ихъ въ указанномъ уравненіи. Тогда оно можетъ послужить для нахожденія этихъ неизвѣстныхъ. Теорема эта также пригодна для нахожденія перемѣщеній.

Теорема взаимности имѣетъ весьма общій характеръ. Измѣняя случаи нагрузокъ, названныя нами первымъ и вторымъ, мы можемъ представить теорему въ самыхъ разнообразныхъ видахъ. Этимъ можно пользоваться, чтобы исключить еще нѣкоторыя величины. Стоитъ только подобрать такой случай, при которомъ какое нибудь перемѣщеніе напр. ψ_2, есть нуль, и сейчасъ исчезаетъ сила Ψ_1, умножающаяся на это перемѣщеніе. Наоборотъ возьмемъ такой случай, для котораго какая нибудь сила напр. Ψ_2 есть нуль; тогда изъ уравненія исчезнетъ перемѣщеніе ψ_1, умножающееся на эту силу.

Разсмотримъ нѣкоторые частные виды теоремы взаимности.

---

[1]) Здѣсь и скорости и импульсы нужно понимать въ обобщенномъ смыслѣ этихъ словъ.

67. Разсматриваемъ только двѣ силы. Положимъ въ нашъ вопросъ входятъ только двѣ силы

$$\Phi \text{ и } \Psi.$$

Для перваго случая, т. е. для перваго разсматриваемаго состоянія тѣла, пусть дѣйствуетъ только одна сила

$$\Phi_1,$$

а сила

$$\Psi_1$$

равна нулю. Перемѣщенія, соотвѣтствующія этому случаю по прежнему назовемъ черезъ φ_1, ψ_1 [1]).

Второй случай дѣйствія силъ пусть заключается въ одной нагрузкѣ

$$\Psi_2,$$

а величина силы

$$\Phi_2$$

пусть будетъ равна нулю. Перемѣщенія для втораго случая назовемъ

$$\varphi_2, \ \psi_2.$$

Примѣнимъ къ этому вопросу теорему взаимности. Получимъ:

$$\Phi_1 \,.\, \varphi_2 = \Psi_2 \,.\, \psi_1$$

или иначе

$$\frac{\varphi_2}{\psi_1} = \frac{\Psi_2}{\Phi_1} \quad . \; . \; . \; . \; (35)$$

т. е. отношеніе перемѣщеній

$$\frac{\varphi_2}{\psi_1}$$

равно обратному отношенію силъ

$$\frac{\Psi_2}{\Phi_1}.$$

Если будетъ равенство силъ

$$\Phi_1 = \Psi_2$$

[1]) Хотя сила $\Psi_1 = 0$, но тѣмъ не менѣе соотвѣтствующее перемѣщеніе ψ_1 можетъ не быть нулемъ. Оно вызывается силой

$$\Phi_1.$$

то, какъ слѣдствіе, получится равенство перемѣщеній

$$\varphi_2 = \psi_1 \; . \; . \; . \; .$$

Обратно: равенство перемѣщеній

$$\varphi_1 = \psi_2$$

вызываетъ, какъ слѣдствіе, равенство силъ

$$\Phi_1 = \Psi_2.$$

68. Примѣры. a) *Изгибъ прямаго бруска.* Возьмемъ горизонтальный брусокъ, расположенный на любомъ числѣ опоръ, и будемъ прикладывать къ нему вертикальныя нагрузки. Перемѣщенія, опредѣляющія состояніе тѣла, здѣсь будутъ прогибы точекъ оси бруска. Каждой точкѣ оси напр. A (фиг. 38) отвѣчаетъ свой прогибъ, своя особая координата. Ей же соотвѣтствуетъ своя особая внѣшняя сила,—нагрузка, приложенная въ этой точкѣ A. Такимъ образомъ здѣсь имѣемъ случай, когда число координатъ, опредѣляющихъ состояніе тѣла, безконечно велико. Также велико и соотвѣтствующее число типовъ нагрузокъ.

Остановимъ наше вниманіе на двухъ точкахъ A и B, и будемъ разсматривать дѣйствіе нагрузокъ, къ нимъ приложенныхъ. Пусть первая нагрузка (фиг. 38. I) состоитъ изъ одной силы P, приложенной въ A; при второй нагрузкѣ (фиг. 38. II) дѣйствуетъ такая же сила, но въ точкѣ B.

По доказанному въ предыдущемъ n^0, прогибъ f_1 точки B, для первой нагрузки, будетъ одинаковъ съ прогибомъ

$$f_2$$

точки A для второй нагрузки. Т. е. какъ будто при перенесеніи силы P изъ A въ B, одновременно съ тѣмъ прогибъ точки B передвигается въ A, не мѣняя своей величины.

b) *Изгибъ сомкнутаго криваго тѣла.* Пусть имѣемъ сомкнутое кривое тѣло произвольной формы (звено). Приложимъ къ нему по нѣкоторой хордѣ его AB (фиг. 38-bis) двѣ равныя и прямо противуположныя силы P. Положимъ, что подъ дѣйствіемъ этихъ силъ длина какой нибудь другой хорды CD получитъ удлиненіе δ. Тогда на основаніи теоремы взаимности заключаемъ, что если такія же силы P будутъ дѣйствовать по хордѣ CD, то хорда AB получитъ удлиненіе равное δ.

c) *Изгибъ пластинокъ.* Возьмемъ произвольную пластинку, подпертую какимъ угодно способомъ (дно, стѣнка сосуда и т. д.). Въ нѣкоторой точкѣ ея A приложимъ силу P; разсмотримъ перемѣщеніе какой нибудь другой точки B нашей пластинки и пусть слагающая этого перемѣщенія, параллельная P, будетъ δ. Тогда, на основаніи теоремы взаимности, заключаемъ что если сила P будетъ перенесена въ точку B, то точка A получитъ перемѣщеніе, слагающая котораго, параллельная P, будетъ равна δ (теорема Буссинé).

d) Вообразимъ себѣ произвольное тѣло, и разсмотримъ дѣйствіе на него силъ слѣдующихъ двухъ типовъ: 1) первый типъ представляютъ двѣ противуположныя силы, равныя единицѣ (одному килогр.) онѣ приложены въ двухъ точкахъ поверхности тѣла A и B. То измѣненіе формы, которое соотвѣтствуетъ этому типу силъ, есть измѣненіе длины AB. Но онѣ производятъ кромѣ того еще и различныя другія деформаціи въ тѣлѣ, и между прочимъ производятъ измѣненіе его объема, которое назовемъ W_1.

2) Въ качествѣ силы втораго типа выберемъ давленіе равномѣрно распредѣленное по всей поверхности тѣла, и равное единицѣ (одному кил. на квад. сант.). Измѣненіе формы, отвѣчающее этому типу силъ, есть измѣненіе объема. Но дѣйствіе этой силы сопровождается и появленіемъ другихъ деформацій; между прочимъ можетъ измѣниться разстояніе точекъ тѣла A и B. Измѣненіе этого разстоянія назовемъ Δ_2.

По теоремѣ взаимности получимъ

$$W_1 = \Delta_2$$

т. е. измѣненіе объема при дѣйствіи силы перваго типа, равно измѣненію длины AB, при дѣйствіи силы втораго типа.

Здѣсь W_1 и Δ_2 представляютъ измѣненія безусловныя, а не относительныя.

69. Примѣненіе теоремы взаимности для нахожденія давленія средней опоры въ двухпролетной балкѣ. Пусть балка (фиг. 39) лежитъ на трехъ опорахъ A, C, B, и нагружена силами

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,$$

требуется найти давленіе средней опоры X.

Заданный случай дѣйствія силъ будемъ считать первымъ; среднюю опору при этомъ отбросимъ и замѣнимъ ея дѣйствіе давленіемъ X, которое причислимъ къ внѣшнимъ силамъ.

Для втораго случая дѣйствія силъ назначимъ слѣдующую фиктивную нагрузку: въ точкѣ C дѣйствуетъ *внизъ* грузъ равный единицѣ, уравновѣшивающійся опорами A, B. Для этого простаго случая опредѣлимъ кривую прогиба, вычисленіемъ или построеніемъ; найдемъ ординаты прогиба

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4,$$

соотвѣтствующія точкамъ приложенія грузовъ

$$P_1\ .\ .\ .\ .\ P_4,$$

и ординату Δ прогиба точки C.

Примѣняя теорему взаимности имѣемъ:

Первый случай.	**Второй случай.**
Силы.	*Перемѣщенія.*
P_1	δ_1
P_2	δ_2
P_3	δ_3
P_4	δ_4
X	Δ
Перемѣщенія.	*Силы.*
Они намъ не нужны и мы не будемъ ихъ опредѣлять.	$X = -1$, а всѣ нагрузки P равны нулю.

Слѣд. теорема взаимности даетъ:

$$P_1 . \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 . \delta_3 + P_4 . \delta_4 - X . \Delta = 0 \text{ [1]}$$

т. е.

$$X = \frac{\Sigma P \delta}{\Delta}. \text{ [2]}$$

70. Случай, когда одна сила не вліяетъ на перемѣщенія, отвѣчающія другой силѣ. Будемъ разсматривать только двѣ силы типовъ Φ и Ψ; и пусть задано, что сила Φ не вызываетъ перемѣщенія ψ, соотвѣтствующаго второй силѣ. Назначимъ слѣдующіе два случая дѣйствія силъ:

въ первомъ случаѣ дѣйствуетъ только одна сила Φ_1. Она произведетъ нѣкоторое перемѣщеніе φ_1, но по заданію будетъ $\psi_1 = 0$;

---

[1]) Изъ дальнѣйшаго изложенія будетъ видно, что предложенное въ этомъ n^0, рѣшеніе даетъ правило для построенія линіи вліянія, показывающей вліяніе подвижныхъ грузовъ на давленіе средней опоры.

[2]) Работа силы X отрицательная, такъ какъ она идетъ въ сторону противуположную Δ.

во второмъ случаѣ дѣйствуетъ только одна сила Ψ_2; она произведетъ нѣкоторыя перемѣщенія φ_2 и ψ_2.

По теоремѣ взаимности имѣемъ

$$\Phi_1 \cdot \varphi_2 = \Psi_2 \cdot \psi_1$$

Но

$$\psi_1 = 0;$$

слѣд. и

$$\varphi_2 = 0$$

т. е. если задано, что сила $\mathbf{\Phi}$ не вліяетъ на перемѣщенія ψ, соотвѣтствующія другой силѣ $\mathbf{\Psi}$, то и обратно сила $\mathbf{\Psi}$ не оказываетъ никакого вліянія на перемѣщенія φ, отвѣчающія силѣ $\mathbf{\Phi}$.

71. Примѣненіе теоремы взаимности къ построенію линій вліянія. Изслѣдованіе дѣйствія подвижныхъ грузовъ всего удобнѣе дѣлается помощію линій вліянія. Онѣ вполнѣ ясно и наглядно показываютъ, какъ при передвиженіи поѣзда измѣняются перемѣнныя величины, имѣющія значеніе при расчетѣ и изслѣдованіи фермъ: реакціи опоръ, внутреннія напряженія частей, перемѣщенія и т. д.

Теорема взаимности даетъ очень удобный способъ для построенія такихъ линій вліянія, и это придаетъ ей особое значеніе въ области Строительной Механики.

Какъ извѣстно линія вліянія для количества X есть ломаная или кривая, ординаты которой удовлетворяютъ слѣдующему условію: ордината y, приходящаяся вертикально подъ любымъ положеніемъ подвижнаго груза, (фиг. 40), изображаетъ ту величину X, которая получается *для этого положенія* груза, когда величина его равна единицѣ (одному килограмму).

Имѣя линію вліянія, сейчасъ получаемъ значеніе X, для любаго положенія поѣзда, т. е. системы связанныхъ между собою подвижныхъ грузовъ. Нужно начертить положеніе поѣзда на фермѣ, надъ линіей вліянія, и взять сумму произведеній изъ отдѣльныхъ грузовъ на тѣ ординаты линіи вліянія, которыя приходятся вертикально подъ грузами. Такъ для случая, изображеннаго на фиг. 41, будетъ

$$X = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + \ldots\ldots = \Sigma P y.$$

Мы предполагаемъ, что читатель уже знакомъ съ линіями вліянія и построеніемъ ихъ для статически опредѣлимыхъ величинъ. По этому ограничимся здѣсь указаніями на то, какъ, при помощи теоремы взаимности, строятся линіи вліянія для лишнихъ неизвѣстныхъ, т. е. для лишнихъ реакцій или внутреннихъ напряженій лишнихъ частей.

Эти лишнія неизвѣстныя мы должны причислить, обычнымъ пріемомъ, къ числу внѣшнихъ силъ, и тогда искомыя нами величины, а также соотвѣтствующія имъ координаты (перемѣщенія, удлиненія и пр.) входятъ въ уравненіе, изображающее теорему взаимности. Слѣд. это уравненіе можетъ примѣняться для разысканія указанныхъ неизвѣстныхъ. Начнемъ съ простаго случая.

72. Случай когда имѣется только одна лишняя неизвѣстная. Обозначимъ ее буквою Φ_1, а соотвѣтствующую координату—черезъ φ_1. Кромѣ этой внѣшней силы, дѣйствуетъ еще рядъ подвижныхъ грузовъ

$$P,\ P',\ P'',\ .\ .\ .\ .$$

Всѣ они вертикальны, и имъ соотвѣтствуютъ вертикальныя перемѣщенія точекъ (фиг. 42)

$$a,\ b,\ c,\ .\ .\ .\ .$$

ихъ приложенія къ фермѣ.

Этотъ заданный случай дѣйствія силъ будемъ называть *первымъ*.

Назначимъ теперь такой частный видъ заданнаго общаго случая: Сила Φ равна единицѣ, а всѣ нагрузки отсутствуютъ, т. е. всѣ P равны нулю.

Этотъ частный случай будемъ называть *вторымъ*, и величины къ нему относящіяся отмѣчаемъ подстрочными знаками 2. По этому перемѣщеніе отвѣчающее силѣ

$$\Phi_2 = 1$$

должны назвать буквою φ_2. Но эта сила вызоветъ въ фермѣ, кромѣ перемѣщенія φ_2, еще разныя другія перемѣщенія и измѣненія. Между прочимъ она можетъ перемѣстить точки

$$a,\ b,\ c,\ .\ .\ .\ .\ ,$$

къ которымъ въ первомъ случаѣ прикладывались нагрузки P. Вертикальныя перемѣщенія этихъ точекъ, получающіяся во второмъ случаѣ назовемъ

$$y_2',\ y_2'',\ y_2'''\ .\ .\ .\ .$$

Величины этихъ ординатъ для наглядности построены на фиг. 42; каждая отложена вертикально подъ соотвѣтствующей ей точкой фермы. Это и будутъ требующіяся намъ ординаты линіи вліянія

Для доказательства примѣнимъ теорему взаимности къ назначеннымъ двумъ случаямъ дѣйствія силъ.

Первый случай.

Силы.

$$\Phi_1$$

$$P', \; P'', \; P''' \; . \; . \; . \; .$$

Перемѣщенія.

$$\varphi_1$$

Перемѣщенія для силъ P намъ не нужны.

Второй случай.

Перемѣщенія.

$$\varphi_2$$

$$y_2', \; y_2'', \; y_2''' \; . \; . \; . \; .$$

Силы.

$$\Phi_2 = 1$$

Всѣ P равны нулю.

Взаимное соотношеніе этихъ двухъ случаевъ представится уравненіемъ:

$$\Phi_1 \varphi_2 + \Sigma P y_2 = \varphi_1 \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

Но если Φ представляетъ напряженіе линией части, то перемѣщеніе φ_1 пропорціонально искомой величинѣ

$$\Phi_1$$

и коеффиціентъ пропорціональности k намъ извѣстенъ, когда размѣры этой части даны. А они необходимо должны быть даны для опредѣленности вопроса.

Если же Φ представляетъ реакцію неподвижной опоры, то перемѣщеніе φ_1 равно нулю.

И такъ вообще можно принять

$$\varphi_1 = k \; \Phi_1,$$

съ тѣмъ, что, если имѣемъ дѣло съ реакціей неподвижной опоры, то

$$k = 0.$$

Тогда изъ уравненія (36) получаемъ:

$$\Phi_1 = \frac{1}{k - \varphi_2} \Sigma P y_2 = \alpha \, . \, \Sigma P y_2 .$$

Здѣсь α, т. е.

$$\frac{1}{k - \varphi_2}$$

есть постоянный коеффиціентъ, вполнѣ опредѣляющійся заданіемъ фермы, и не зависящій отъ подвижнаго груза. Притомъ онъ легко опредѣляется и можетъ быть вычисленъ.

Остальной множитель второй части уравненія (36)

$$\Sigma P y_2$$

имѣетъ совершенно тотъ характеръ какой требуется для линій вліянія. Каждая нагрузка P умножается на ординату y_2, находящуюся вертикально подъ этой нагрузкой и эти произведенія складываются. Въ результатѣ получается искомая величина неизвѣстной Φ_1, отвѣчающая заданному положенію подвижныхъ грузовъ. Слѣд. линія, ординаты которой суть y_2, можетъ быть разсматриваема какъ линія вліянія для искомой Φ_1. Существованіе въ формулѣ постояннаго коеффиціента α неизмѣняетъ форму этой линіи вліянія, а только перемѣняетъ масштабъ. Можно сначала забыть объ этомъ коеффиціентѣ; разборъ вліянія разныхъ положеній грузовъ, разысканіе невыгоднаго положенія, дающаго max. или min. Φ,—все это можетъ быть сдѣлано независимо отъ α. Только подъ конецъ, находя численную величину Φ, нужно ввести множитель α.

И такъ мы можемъ сказать:

Чтобы получить линію вліянія для неизвѣстной силы

$$\Phi,$$

нужно назначить фиктивный случай дѣйствія силъ, (названный нами вторымъ), состоящій въ слѣдующемъ: всѣ нагрузки отбрасываются, и вводится только одна внѣшняя сила

$$\Phi_2$$

равная единицѣ. Для этого случая нужно опредѣлить вертикальныя перемѣщенія [1]) тѣхъ точекъ фермы, на которыя передается дѣйствіе подвижныхъ грузовъ. Затѣмъ построимъ линію, ординаты которой представляютъ эти перемѣщенія. Каждая ордината должна приходиться вертикально подъ той точкой, перемѣщеніе которой измѣряется такой ординатой. Построенная линія будетъ линія вліянія для искомой неизвѣстной.

73. Обыкновенно нагрузка фермъ передается только въ узловыя точки ихъ (фиг. 43). Тогда достаточно найти ординаты y_2 для каждой изъ узловыхъ точекъ. Соединяя ихъ прямыми получимъ линію вліянія въ видѣ ломаной.

Если же нагрузка можетъ передаваться непосредственно въ любую точку одного изъ поясовъ фермы, то линія вліянія будетъ кривая. Она строится приблизительно по точкамъ.

---

[1]) Пониженія считаемъ положительными, а повышенія—отрицательными.

Во всякомъ случаѣ нужно откладывать перемѣщенія тѣхъ точекъ фермы, на которыя передаются подвижныя нагрузки. Слѣд. если ѣзда по верху—то нужно брать перемѣщенія точекъ верхняго пояса; обратно—нужно брать перемѣщенія точекъ нижняго поѣзда, если ѣзда по низу.

74. Относительно коеффиціента α приведемъ его значенія для двухъ частныхъ случаевъ:

a) Искомая сила Φ_1 представляетъ реакцію неподвижной опоры.

Тогда соотвѣтствующее перемѣщеніе φ_1 равно нулю, и α превращается въ

$$-\frac{1}{\varphi_2},$$

гдѣ φ_2 есть взятое съ противнымъ знакомъ перемѣщеніе получаемое опорной точкой, когда опора отброшена и замѣнена внѣшней силой Φ_2, равной единицѣ.

b) Искомая сила Φ_1 есть растяженіе бруска, имѣющаго длину l и площадь сѣченія ω.

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_1 . l}{E\omega}$$

Слѣд.

$$k = \frac{l}{E\omega}$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{l}{E\omega} - \varphi_2},$$

гдѣ

$$\varphi_2$$

имѣетъ прежнее значеніе.

75. Примѣры построенія линій вліянія. Балка на трехъ опорахъ (фиг. 45); подвижные грузы передаются на верхніе узлы. Построить линію вліянія для давленія средней опоры.

Здѣсь неизвѣстная, для которой требуется линія вліянія, есть реакція неподвижной опоры.

Отбросимъ среднюю опору и замѣнимъ ее силой $X = 1$ направленной внизъ. Найдемъ вертикальныя перемѣщенія, сообщаемыя такой силой узламъ

$$a,\ b,\ c,\ d,$$

на которые передаются подвижные грузы. Эти перемѣщенія

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,$$

будутъ ординаты линіи вліянія. Ихъ откладываемъ вертикально подъ узлами, и концы ординатъ соединяемъ прямыми.

Одновременно съ нахожденіемъ этихъ ординатъ, нужно, для того же случая $X = 1$, найти вертикальное перемѣщеніе Δ опоры B. Оно соотвѣтствуетъ величинѣ φ_2 нашего общаго случая. Значеніе X для системы подвижныхъ нагрузокъ будетъ

$$X = -\frac{1}{\Delta}\cdot\Sigma P y$$

Знакъ минусъ получился здѣсь потому, что сила X направлена кверху, т. е. противуположно силамъ P.

Если подвижные грузы передаются на нижніе узлы, то за ординаты линіи вліянія нужно принять перемѣщенія нижнихъ узловъ для случая $X = 1$. Множитель Δ—по прежнему есть перемѣщеніе точки B.

76. Другой примѣръ. Линія вліянія для горизонтальнаго распора арочной фермы: (фиг. 46).

Здѣсь опять искомая величина есть *реакція* неподвижной опоры. Отбросимъ мысленно устои, назначимъ распоръ $X = 1$, и для этого случая опредѣлимъ *во первыхъ* вертикальныя перемѣщенія всѣхъ верхнихъ узловъ фермы

$$y,\ y',\ y'',\ \ldots\ldots;$$

во вторыхъ перемѣщеніе, отвѣчающее силѣ X, т. е. уменьшеніе разстоянія между пятками A и B; его назовемъ Δ. Ординаты y будутъ ординаты линіи вліянія, и должны быть отложены вертикально подъ своими узлами. Междоузлія нашей линіи вліянія будутъ прямыя. При данной подвижной нагрузкѣ искомая величина X будетъ

$$X = -\frac{1}{\Delta}\cdot\Sigma P y.$$

77. Измѣненіе этого примѣра. Вмѣсто устоевъ вводится затяжка, соединяющая точки A, B (фиг. 47); она имѣетъ длину l и площадь сѣченія ея есть ω [1]). Требуется построить линію вліянія для напряженія этой затяжки X.

[1]) Фермы этого рода часто примѣняются для стропилъ; тогда имъ придаютъ серпообразную фигуру. Иногда фермы съ затяжкой примѣняются и для мостовъ. Примѣромъ могутъ служить фермы моста черезъ р. Мозель у Трарбаха (фиг. 47-bis).

Здѣсь имѣемъ дѣло съ неизвѣстной, которая представляетъ напряженіе лишняго бруска. Рѣшеніе будетъ отличаться отъ предыдущаго только величиною постояннаго множителя. Его нужно взять, какъ было показано въ n^0 74-b., равнымъ

$$\alpha = \frac{1}{\frac{l}{E\omega} - \Delta}$$

гдѣ Δ имѣетъ тоже значеніе, что и въ предыдущемъ случаѣ, т. е. представляетъ уменьшеніе разстоянія AB при дѣйствіи силы $X=1$ (при чемъ затяжка предполагается отброшенной).

78. Случай когда имѣется нѣсколько неизвѣстныхъ силъ. Примѣнимъ пріемъ, изложенный въ n^0 72, и къ этому случаю. Намъ дано извѣстное число подвижныхъ нагрузокъ

$$P_1', \; P_1'', \; P_1''' \; . \; . \; . \; .$$

и требуется найти лишнія неизвѣстныя

$$\Phi_1, \; \Psi_1, \; . \; . \; . \; .$$

которымъ отвѣчаютъ перемѣщенія

$$\varphi_1, \; \psi_1, \; . \; . \; . \; .$$

Этотъ случай дѣйствія силъ считаемъ *первымъ*, а затѣмъ назначимъ слѣдующій *второй* случай; всѣ нагрузки P отброшены, и остается только одна неизвѣстная

$$\Phi_2,$$

величина которой есть единица. Прочія неизвѣстныя суть нули. Эта сила кромѣ соотвѣтствующаго ей перемѣщенія

$$\varphi_2,$$

можетъ сообщить перемѣщенія точкамъ, гдѣ были, въ первомъ случаѣ, приложены нагрузки. Вертикальныя проекціи этихъ перемѣщеній назовемъ

$$y_2', \; y_2'', \; y_2''', \; . \; . \; . \; .$$

Но кромѣ того сила

$$\Phi_2 = 1$$

можетъ вызвать также перемѣщенія, отвѣчающія другимъ неизвѣстнымъ силамъ. Эти перемѣщенія назовемъ:

$$\psi_2, \; \theta_2 \; . \; . \; . \; .$$

Примѣняя теорему взаимности, получаемъ:

Первый случай.	**Второй случай.**
Силы.	*Перемѣщенія.*
$\Phi_1, \Psi_1, \Theta_1, \ldots$	$\varphi_2, \psi_2, \theta_2, \ldots$
$P_1', P_1'', P_1''', \ldots$	$y_2', y_2'', y_2''', \ldots$
Перемѣщенія.	*Силы.*
$\varphi_1, \psi_1, \theta_1, \ldots$	$\Phi_2 = 1, \Psi_2 = 0, \Theta_2 = 0.$
Перемѣщенія точекъ приложенія нагрузокъ P намъ не нужны:	$P' = 0, P'' = 0, P''' = 0.$

Слѣд. уравненіе будетъ:

$$\Phi_1 \cdot \varphi_2 + \Psi_1 \cdot \psi_2 + \Theta_1 \cdot \theta_2 + \ldots + \Sigma P_1 y_2 = 1 \cdot \varphi_1 \quad \ldots \quad (37)$$

Такихъ уравненій мы можемъ получить столько же сколько неизвѣстныхъ силъ

$$\Phi_1, \Psi_1, \Theta_1, \ldots$$

Для полученія ихъ нужно поступать совершенно такъ какъ мы поступали для уравненія (37), но примѣнять этотъ пріемъ послѣдовательно къ силамъ типовъ.

$$\Psi, \Theta, \ldots$$

Слѣд. нужно разсмотрѣть измѣненія формы для слѣдующихъ фиктивныхъ, придуманныхъ случаевъ:

третьяго, когда

$\Psi_3 = 1$, всѣ прочія силы равны нулю;

четвертаго, когда

$\Theta_4 = 1$; всѣ прочія силы равны нулю, и т. д.

Сравнивая каждый изъ этихъ случаевъ съ первымъ, и примѣняя теорему взаимности, получимъ въ общемъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ.

Тогда вопросъ можетъ быть рѣшенъ вычисленіемъ. Но въ этомъ случаѣ имѣемъ *совокупныя* уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными, и не представляется такого простаго пріема для построенія линій вліянія, какой мы получили въ случаѣ одной неизвѣстной.

79. Упрощеніе. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно удачнымъ выборомъ лишнихъ неизвѣстныхъ силъ достигнуть значительнаго упрощенія, и вмѣсто *совокупныхъ* уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными, получить *отдѣльныя* уравненія, содержащія каждое только одну неизвѣстную. Такія уравненія рѣшаются очень легко; вычисленія требуются самыя простыя. Кромѣ того имѣя такія уравненія легко построить линію вліянія для каждой неизвѣстной. Однимъ словомъ неизвѣстныя раздѣляются, исключаются изъ нашихъ уравненій, а въ этомъ исключеніи и заключается цѣль большинства пріемовъ механики.

Для достиженія этого нужно выбрать неизвѣстныя силы

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta,\ \ldots$$

такимъ образомъ, чтобы одна изъ нихъ не вызывала перемѣщеній соотвѣтствующихъ другимъ. Напр. сила

$$\Phi$$

при своемъ дѣйствіи не должна вызывать перемѣщеній

$$\psi,\ \theta,\ \ldots$$

А сила

$$\Psi$$

не должна вызывать перемѣщеній

$$\varphi,\ \theta,\ \ldots$$

и т. д.

Другими словами въ выраженіи для силы Φ въ функціи отъ координатъ не должны входить члены съ

$$\psi,\ \theta,\ \ldots$$

Подобно этому въ выраженіи силы

$$\Psi$$

не должны входить координаты

$$\varphi,\ \theta,\ \ldots$$

80. Замѣтимъ, что нѣкоторыя изъ этихъ условій суть слѣдствія другихъ, такъ что число устанавливаемыхъ, независимыхъ другъ отъ друга условій, не такъ велико, какъ можетъ показаться. Если установлено, что Φ не вызываетъ перемѣщенія ψ, то изъ n^0 70, слѣдуетъ, что и обратно сила

$$\Psi$$

не вызываемъ перемѣщенія φ. Такимъ образомъ въ случаѣ двухъ неизвѣстныхъ силъ имѣемъ только одно условіе.

Если неизвѣстныхъ силъ три

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta,$$

то поставимъ условіе, что Φ не вызываетъ перемѣщеній

$$\psi,\ \theta.$$

Слѣдствіемъ этого будетъ, по n^0 70, то, что силы Ψ и Θ не вызываютъ перемѣщенія φ. Остается ввести еще условіе, что сила

$$\Psi$$

не вызываетъ перемѣщенія θ; слѣдствіемъ его будетъ то, что сила

$$\Theta$$

не вызываетъ перемѣщеніе типа ψ. И такъ здѣсь имѣемъ всего три независящія другъ отъ друга условія.

81. Положимъ, что требуемыя условія выполнены, и обратимся къ нашему вопросу, изложенному въ n^0 78. Теперь сила

$$\Phi_2$$

вызываетъ только перемѣщеніе

$$\varphi_2,$$

остальныя же перемѣщенія

$$\psi_2,\ \theta_2\ .\ .\ .\ .\ .,$$

отвѣчающія другимъ неизвѣстнымъ, обращаются въ нули. Слѣд. изъ уравненія (37) исключаются всѣ неизвѣстныя, кромѣ $\mathbf{\Phi}_1$. Эта послѣдняя легко опредѣляется и уравненіе (37) получаетъ форму, согласную съ (36), и поддается построенію линіи вліянія, также какъ и для случая одной неизвѣстной, разобраннаго въ n^0 72. Тоже относится и къ другимъ неизвѣстнымъ.

82. Примѣръ. Возьмемъ слѣдующую двухпролетную арочную ферму (фиг. 48): Здѣсь A и B шарнерныя пятки, вызывающія, каждая, по двѣ реакціи; C—обыкновенная опора на каткахъ вызывающая только вертикальную реакцію. Всего здѣсь пять неизвѣстныхъ реакцій, слѣд. *двѣ* изъ нихъ статически неопредѣлимы.

Примемъ за лишнія неизвѣстныя тѣ двѣ реакціи, которыя дѣйствуютъ въ пяткѣ A. Направленія же ихъ подберемъ такъ, что бы удовлетворить условіямъ, о которыхъ говорилось въ n^0 79. Для этого оставляя опоры B и C, отбросимъ опору A и замѣнимъ ее двумя силами $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$. Для первой изъ нихъ можно взять на удачу произвольное направленіе; пусть она будетъ горизонтальна (фиг. 48-b). Теперь назначимъ тотъ случай дѣйствія силъ, который у насъ назывался вторымъ, т. е. отбросимъ нагрузки P, и силу **Ψ**; оставимъ только силу

Ф.

Пусть перемѣщеніе, сообщаемое ею точкѣ A, будетъ направлено по AA'. Тогда вторую слагающую Ψ нужно направить по перпендикуляру къ AA'.

Дѣйствительно, если поступимъ такъ, то перемѣщенія ψ, отвѣчающія силѣ

Ψ,

то же будутъ идти по перпендикуляру къ AA'. Слѣд. сила

Ф,

производящая перемѣщеніе AA', не вызываетъ перемѣщенія ψ. А потому и обратно сила

Ψ

не будетъ вызывать перемѣщенія идущаго по направленію **Ф.** Другими словами сила

Ψ

сообщаетъ точкѣ A перемѣщеніе перпендикулярное къ силѣ.

Ф.

Такимъ образомъ произведено требуемое раздѣленіе силъ [1]).

83. Линіи вліянія для перемѣщеній. Изъ числа различныхъ перемѣщеній и измѣненій фигуры въ фермахъ наиболѣе интересны вертикальныя перемѣщенія ея узловъ. Объ нихъ мы и будемъ здѣсь говорить.

Для рѣшенія этого вопроса нужно прежде всего построить линіи вліянія для всѣхъ лишнихъ неизвѣстныхъ, если такія имѣются. Затѣмъ причислимъ всѣ лишнія неизвѣстныя къ внѣшнимъ силамъ и будемъ разбирать отдѣльно—вліяніе подвижной нагрузки, и отдѣльно—вліяніе каждой изъ лишнихъ силъ. Если система статически опредѣлимая, то вторая часть рѣшенія отпадаетъ, и остается только вліяніе подвижной нагрузки. Такимъ образомъ въ наше рѣшеніе включается вопросъ о линіяхъ вліянія для перемѣщеній статически опредѣлимыхъ фермъ.

---

[1]) Этотъ примѣръ взятъ изъ Графической Статики Мюллера-Бреслау. У него можно найти еще нѣсколько примѣровъ на такой выборъ лишнихъ неизвѣстныхъ. Т. II стр. 60—68.

84. Положимъ мы выбрали въ фермѣ нѣкоторую опредѣленную точку, извѣстный узелъ ея m, и желаемъ построить линію вліянія для вертикальнаго перемѣщенія этого узла, которое назовемъ Δ. Разбирая сначала отдѣльно вліяніе подвижнаго груза, отбросимъ всѣ лишнія неизвѣстныя. Остаются нагрузки

$$P', P'', P''', \ldots,$$

приложенныя въ точкахъ

$$a_n, b, c, \ldots$$

(фиг. 49). Состояніе фермы при такихъ нагрузкахъ будемъ называть *первымъ*, и сейчасъ же назначимъ фиктивное состояніе ея, *второе*, которое должно состоять въ слѣдующемъ: всѣ нагрузки P отброшены, а въ узлѣ m, приложена *вертикальная* сила равная единицѣ [1]); (конечно кромѣ того должны быть реакціи опоръ, уравновѣшивающія эту единичную силу).

Для избранной нами фиктивной нагрузки нужно опредѣлить вертикальныя перемѣщенія

$$\delta', \delta'', \delta''', \ldots$$

точекъ

$$a, b, c, \ldots,$$

т. е. тѣхъ точекъ, въ которыхъ при первомъ состояніи дѣйствуютъ нагрузки.

Всѣ δ всего удобнѣе находятся графически, построеніемъ діаграммы перемѣщеній для фиктивной нагрузки.

Найдя ихъ построимъ величины δ вертикально подъ соотвѣтствующими точками фермы

$$a, b, c, \ldots$$

Эти перемѣщенія и будутъ ординаты искомой линіи вліянія.

Для доказательства примѣнимъ теорему взаимности къ состояніямъ фермы, названнымъ нами первымъ и вторымъ. Для наглядности сначала выпишемъ всѣ величины въ слѣдующей таблицѣ:

---

[1]) Если бы намъ было нужно знать *горизонтальное* перемѣщеніе узла m, получающееся отъ той же заданной дѣйствительной нагрузки, то фиктивное, *второе*, состояніе фермы должно было бы состоять изъ приложенной въ узлѣ m *горизонтальной* силы равной единицѣ, вмѣстѣ съ уравновѣшивающими ее давленіями опоръ.

Первое состоянiе.

Силы:

a) нагрузки

$$P', P'', P''', \ldots .$$

b) Реакцiи опоръ.

Перемѣщенiя.

a) Перемѣщенiя точекъ приложенiя нагрузокъ P', P'', намъ ненужны.

b) Искомое перемѣщенiе узла m есть Δ_1.

c) Перемѣщенiя опорныхъ точекъ равны нулю.

Второе состоянiе.

Перемѣщенiя.

a) Перемѣщенiя узловъ.

$$\delta', \delta'', \delta''', \ldots .$$

b) Перемѣщенiя опоръ равны нулю.

Силы.

a) Нагрузки этихъ точекъ равны нулю.

b) Въ точкѣ m приложена вертикальная сила равная 1 кил.

c) Реакцiи опоръ.

Теорема взаимности даетъ слѣдующее уравненiе для нахожденiя Δ_1:

$$1^k . \Delta_1 = P' \delta' + P'' \delta'' + P''' \delta''' + \ldots . = \Sigma P \delta.$$

Изъ него мы видимъ, что дѣйствительно перемѣщенiя

$$\delta', \delta'', \delta''', \ldots .$$

представляютъ ординаты линiи влiянiя, для случая, когда лишнихъ силъ нѣтъ.

И такъ линiя прогибовъ δ отъ назначенной нами фиктивной нагрузки, есть линiя влiянiя для перемѣщенiя узла m.

85. Затѣмъ разсмотримъ отдѣльно дѣйствiе какой нибудь лишней неизвѣстной

$$\Phi,$$

т. е. предположимъ, что нагрузки

$$P', P'', P''', \ldots ,$$

а также всѣ остальныя лишнiя неизвѣстныя отброшены, и осталась только сила

$$\Phi,$$

которая однако зависитъ отъ подвижнаго груза, причемъ эта зависимость изображена извѣстной намъ линiей влiянiя. Назначимъ для силы Φ нѣкоторую произвольную величину, напр. единицу, и для этого частнаго заданія опредѣлимъ вертикальное перемѣщеніе:

$$\Delta_0$$

узла m. Тогда при различныхъ значеніяхъ силы Ф, перемѣщенія того же узла будутъ

$$\Phi \cdot \Delta_0$$

Слѣд., имѣющаяся у насъ линія вліянія для силы Ф, можетъ считаться также линіей вліянія для того перемѣщенія узла m, которое вызывается этой силой. Но нужно при этомъ принять во вниманіе постоянный множитель

$$\Delta_0.$$

Сказанное о силѣ

$$\Phi$$

относится и къ прочимъ лишнимъ неизвѣстнымъ. Такимъ образомъ мы получимъ нѣсколько отдѣльныхъ линій вліянія для вертикальнаго перемѣщенія узла m, а именно:

a) для подвижной нагрузки, безъ лишнихъ неизвѣстныхъ.

b) для силы Ф.

c), d) для другихъ лишнихъ силъ.

Истинная линія вліянія для сококупности всѣхъ этихъ силъ получится изъ частныхъ линій вліянія путемъ алгебрическаго сложенія ихъ ординатъ.

86 Задачи. 1) Построить линію вліянія для вертикальнаго перемѣщенія узла m фермы, изображенной на фиг. 35. Здѣсь лишнихъ неизвѣстныхъ нѣтъ.

2) Найти вертикальное перемѣщеніе одного изъ узловъ серповидной фермы съ затяжкой (фиг. 29). Здѣсь затяжка есть лишняя линія, и сначала должна быть построена линія вліянія для натяженія затяжки.

87. Историческая замѣтка. Теорема взаимности была открыта почти одновременно и независимо нѣсколькими лицами. Итальянскій математикъ Бетти нашелъ ее въ 1872 году для случая упругаго тѣла, подверженнаго дѣйствію произвольныхъ силъ [1]). Затѣмъ немного позже она была найдена въ самомъ общемъ видѣ лордомъ Рэйлэй [2]).

---

[1]) См. Love. A. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. I, 126.
[2]) См. Philosophical Magazine. Томъ 48. (1874 г.).

Буссинé также приписываетъ себѣ пріоритетъ въ открытіи этой теоремы [1]).

Частный случай теоремы взаимности (относящійся къ плоскимъ фермамъ, части которыхъ не изгибаются, а подвержены только растяженію или сжатію) былъ полученъ Мэксвеллемъ еще въ 1864 г. [2]). Поэтому многіе нѣмецкіе писатели, называютъ теорему взаимности — «теоремой Мэксвелля».

Мною [3]) было указано, что теорема взаимности должна имѣть особое значеніе въ Строительной Механикѣ. Это и подтвердилось работами германскихъ профессоровъ.

---

[1]) См. Boussinesq. Calcul differentielle. II. 125.

[2]) Philosophical Magazine 1864. V. 27 p. 294. Перепечатанъ въ полномъ собраніи мемуаровъ Мэксвелля. The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. 26-й мемуаръ перваго тома.

[3]) Извѣстія С.-Петербургскаго Технологическаго Института, 1883—1884 г.

ГЛАВА V.

Сравненіе рѣшеній, получающихся по способу Мора, съ рѣшеніями, которыя даетъ теорема взаимности.

---

88. Это сравненіе мы сдѣлаемъ на слѣдующемъ простомъ примѣрѣ. Серповидная ферма (фиг. 50) съ затяжкой AB, подвержена дѣйствію вертикальныхъ нагрузокъ. Изгибъ въ частяхъ ея вполнѣ уничтоженъ.

Здѣсь затяжка представляетъ лишній брусокъ, и напряженіе ея X есть лишняя неизвѣстная, которую намъ нужно опредѣлить. Ее будемъ причислять къ внѣшнимъ силамъ.

Перемѣщеніе соотвѣтствующее этой силѣ, будетъ удлиненіе затяжки, равное

$$\frac{X \,.\, L}{E \,.\, \Omega}$$

Перемѣщенія, отвѣчающія нагрузкамъ будутъ перемѣщенія δ узловъ, въ которыхъ приложены нагрузки.

Кромѣ этихъ силъ у насъ дѣйствуютъ напряженія T брусковъ серповидной фермы; соотвѣтствующія имъ перемѣщенія будутъ удлиненія брусковъ, опредѣляемыя по формуламъ вида

$$\frac{T \,.\, l}{E \,.\, \omega}$$

Дѣйствительный случай дѣйствія силъ, будемъ называть первымъ (a) (на фигурѣ 50), и назначимъ еще второй, фиктивный случай дѣйствія силъ отмѣченный на фиг. знакомъ (b) и состоящій въ слѣдующемъ:

На концы фермы A и B дѣйствуютъ, по направленію затяжки, силы X равныя единицѣ. Другихъ внѣшнихъ силъ нѣтъ.

Для обоихъ случаевъ будемъ примѣнять при обозначеніи одинаковыя буквы, но съ подстрочными знаками 1 или 2.

89. Для рѣшенія этого вопроса мы можемъ примѣнить слѣдующіе три пріема.

A. По способу Мора напишемъ, что сумма работъ силъ (внѣшнихъ и внутреннихъ) вторaго случая, для перемѣщеній перваго случая, равна нулю.

Получимъ уравненіе, въ которомъ исчезнутъ силы P, т. к. онѣ не дѣйствуютъ во второмъ случаѣ:

$$-1 . \frac{X . L}{E . \Omega} - \Sigma\, T_2 \frac{T_1 . l}{E . \omega} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \; (A)$$

B) По способу Мора, но въ обратномъ порядкѣ, составляя работу силъ перваго случая для перемѣщеній вторaго случая. Тогда войдутъ нагрузки P, и онѣ будутъ умножаться на вертикальныя перемѣщенія δ_2 узловъ, для случая (b). Сила X будетъ умножаться на величину x, показывающую на сколько уменьшится разстояніе AB въ случаѣ (b). Получимъ уравненіе:

$$Xx + \Sigma\, P\, \delta_2 - \Sigma\, T_1 \frac{T_2 . l}{E . \omega} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \; (B)$$

C) Наконецъ примѣнимъ теорему взаимности. Получимъ

Первый случай.	**Второй случай.**
a) *Силы.*	a) *Перемѣщенія.*
P	δ_2
X	x
b) *Перемѣщенія.*	b) *Силы.*
для P не нужно знать,	всѣ $P = 0$
для X перемѣщеніе равно	$X = 1$
$\frac{X . L}{E . \Omega}$	

Уравненіе будетъ

$$Xx + \Sigma\, P\, \delta_2 = 1 \cdot \frac{X . L}{E . \Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \; (C).$$

Конечно мы могли бы получить это уравненіе изъ двухъ предыдущихъ, вычитая ихъ одно изъ другаго. При этомъ исключились бы внутреннія напряженія T_1, T_2 такъ какъ въ уравненія (A) и (B)

они входятъ одинаковымъ образомъ. Этотъ способъ вывода уравненія (C) былъ бы ничто иное какъ повтореніе, на частномъ примѣрѣ, общаго доказательства теоремы взаимности. Вѣдь доказательство, предложенное нами въ IV главѣ, и заключается въ исключеніи внутреннихъ силъ.

90. Сравнимъ теперь полученныя нами три рѣшенія.

Чтобы воспользоваться рѣшеніемъ A) нужно знать величины T_1, T_2.

Для этого нужно построить двѣ *діаграммы напряженій*: одну для случая (b), а другую для случая когда дѣйствуютъ только нагрузки P, сила же X равна нулю (c) (на фиг. 50). Называя напряженія, полученныя въ первой изъ этихъ діаграммъ черезъ T_2, а въ послѣдней діаграммѣ, черезъ T', получимъ

$$T_1 = T' + X \, . \, T_2.$$

Построеніе такихъ діаграммъ представляетъ сравнительно легкую задачу. Поэтому разсматриваемый пріемъ опредѣленія лишней неизвѣстной X достаточно простъ и его можно рекомендовать для тѣхъ случаевъ, когда имѣемъ дѣло съ постоянной, опредѣленной нагрузкой.

Но для случая перемѣнной, подвижной нагрузки этотъ способъ не годится, потому что примѣненіе его потребовало бы построенія указанныхъ двухъ діаграммъ напряженій *для каждаго узловаго положенія* подвижнаго груза. Это была бы сложная и утомительная работа.

91. Для случая *подвижной* нагрузки удобнѣе пользоваться теоремой взаимности, которая позволяетъ легко построить линію вліянія для силы X. Нужно для случая (b) опредѣлить величины вертикальныхъ перемѣщеній δ_2 всѣхъ тѣхъ узловыхъ точекъ, въ которыя передается нагрузка. То есть—всѣхъ узловъ верхняго пояса, если это мостъ съ ѣздой по верху; и всѣхъ узловъ нижняго пояса, для моста съ ѣздою по низу.

Полученныя величины δ_2, раздѣленныя на постоянный множитель

$$\frac{L}{E \, . \, \Omega} - x,$$

дадутъ ординаты линіи вліянія. Величины δ_2 всего удобнѣе получаются графическимъ построеніемъ. Нужно построить *діаграмму перемѣщеній*; величины же напряженій не нужны, и діаграмма напряженій здѣсь не требуется.

92. Наконецъ обратимся къ рѣшенію, изложенному подъ пунктомъ *B*). Здѣсь требуется знать и напряженія брусковъ, и перемѣщенія узловъ. Очевидно этотъ способъ сложнѣе двухъ другихъ, и его не слѣдуетъ примѣнять.

93. Видоизмѣненіе способа Мора. Способъ Мора (уравненіе *A*) даетъ для нахожденія величины X уравненіе

$$\frac{X \,.\, L}{E \,.\, \Omega} + \Sigma\, T_2 \frac{T_1 \,.\, l}{E \,.\, \omega} = 0.$$

Мы видѣли, что величина T_1 опредѣляется по формулѣ

$$T_1 = T' + X \,.\, T_2$$

слѣд. послѣ подстановки получимъ:

$$\frac{X \,.\, L}{E \,.\, \Omega} + X \Sigma\, T_2{}^2 \cdot \frac{l}{E \,.\, \omega} + \Sigma\, T'\, T_2 \cdot \frac{l}{E \,.\, \omega} = 0 \; . \;\; . \;\; . \;\; . \; (A)$$

Здѣсь величины T_2 и T' представляютъ напряженія брусковъ фермы, найденныя для двухъ случаевъ (b) и (c) изображенныхъ на фиг. 50.

Мы уже говорили, что этотъ пріемъ неудобенъ въ случаѣ подвижнаго груза; тогда опредѣленіе величинъ T' пришлось бы сдѣлать *особо* для *каждаго* узловаго *положенія подвижнаго груза*, такъ какъ величины T', зависятъ отъ этихъ положеній. Но это неудобство можно устранить, видоизмѣняя способъ Мора такъ, чтобы исключить величины T'. Тогда получается удобный пріемъ построенія линіи вліянія для величины X.

Съ этой цѣлью сначала опредѣлимъ вертикальныя перемѣщенія

$$\delta,\ \delta',\ \delta'', \ldots$$

узловъ

$$a,\ b,\ c, \ldots$$

получающіяся въ случаѣ (b). Затѣмъ примѣнимъ способъ Мора для силъ (c) случая и перемѣщеній (b).

Получимъ

$$\Sigma\, P\, \delta - \Sigma\, T'\, T_2 \frac{l}{E\omega} = 0.$$

Слѣд. сумма

$$\Sigma\, T'\, T_2 \frac{l}{E\omega}$$

замѣняется выраженіемъ

$$\Sigma P \delta$$

и вмѣсто (A) получается уравненіе:

$$\frac{X \,.\, L}{E \,.\, \Omega} + X \Sigma T_2{}^2 \frac{l}{E\omega} + \Sigma P \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Итакъ нужно для случая (b) построить *діаграмму перемѣщеній* δ; тогда мы будемъ имѣть величины δ для всѣхъ положеній подвижнаго груза и найдемъ по уравненію (D) величины X, вызываемыя подвижнымъ грузомъ Такимъ образомъ одна діаграмма перемѣщеній δ замѣняетъ всѣ тѣ діаграммы напряженій T', которыя прежде приходилось строить для каждаго особаго положенія подвижнаго груза. При такомъ видоизмѣненіи способъ Мора дѣлается удобопримѣнимымъ и для подвижнаго груза, и даетъ простое построеніе линій вліянія. Примѣняя графическіе пріемы мы должны будемъ построить: одну діаграмму напряженій T_2 для случая (b) и одну діаграмму перемѣщеній для того же случая.

94. Величины перемѣщеній. Рѣшимъ теперь вопросъ другаго рода, для той же фермы. Пусть величина лишней неизвѣстной найдена, а мы желаемъ знать перемѣщеніе Δ_1 одного изъ узловъ ея, именно узла m (фиг. 51). Нагрузку, дѣйствующую въ этомъ узлѣ, назовемъ P, а нагрузки остальныхъ узловъ означимъ черезъ Q. Этотъ заданный случай дѣйствія будемъ называть первымъ (I), и напряженія брусковъ T при этомъ получающіеся снабдимъ подстрочнымъ знакомъ 1.

Затѣмъ вообразимъ себѣ второй, фиктивный случай дѣйствія силъ, означенный на нашей фигурѣ знакомъ II. Пусть сила $X = 0$, сила P въ узлѣ m—равна единицѣ, а всѣ остальные узлы не нагружены. Для этого случая опредѣлимъ: 1) вертикальное перемѣщеніе узла m, его назовемъ Δ_2; 2) вертикальныя перемѣщенія прочихъ узловъ; ихъ назовемъ δ_2; 3) измѣненіе длины AB; его назовемъ x. Величины вертикальныхъ перемѣщеній узловъ считаемъ положительными когда они направлены внизъ; а измѣненіе x считаемъ положительнымъ, когда оно идетъ по направленію силы X, т. е. представляетъ укороченіе длины AB. Напряженія брусковъ для этого случая означимъ черезъ T_2.

Примѣнимъ сначала способъ Мора, взявши силы втораго (II) случая и перемѣщенія перваго (I) случая. Получимъ уравненіе

$$1^k \,.\, \Delta_1 - \Sigma T_2 \frac{T_1 \, l}{E \, \omega} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Затѣмъ обратно, возьмемъ силы перваго случая, и перемѣщенія втораго. По способу Мора получимъ:

$$P . \Delta_2 + \Sigma Q \,\delta_2 . + X . x - \Sigma T_1 . \frac{T_2 . l}{E . \omega} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Наконецъ примѣнимъ теорему взаимности и получимъ уравненіе:

$$P \Delta_2 + \Sigma Q \,\delta_2 + X . x = 1^k . \Delta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

95. Сравнивая три полученныя выраженія мы видимъ:

Если наша цѣль состоитъ въ томъ, чтобы найти перемѣщеніе узла Δ_1 *для одной опредѣленной нагрузки*, то всего лучше пользоваться рѣшеніемъ (A). Для этого нужно знать T_1, T_2, которые находятся построеніемъ діаграммъ напряженій.

Но если разсматриваемъ подвижной грузъ, то слѣдуетъ изучить вліяніе положенія этого груза на перемѣщеніе Δ_1. Тогда нужно построить линію вліянія для этого перемѣщенія, т. е. такую кривую (или ломаную) линію, что для каждаго положенія подвижнаго груза, лежащая прямо подъ нимъ ордината этой линіи изображаетъ величину Δ_1, соотвѣтствующую этому положенію груза. Для этого удобнѣе всего послужитъ теорема взаимности. Нужно, для случая дѣйствія силъ, названнаго вторымъ (II), опредѣлить перемѣщенія δ_2 каждаго изъ узловъ, на которые передается подвижной грузъ (въ нашемъ примѣрѣ это верхніе узлы). Эти величины δ_2 легче всего получаются построеніемъ *діаграммы перемѣщеній* для случая II. Затѣмъ въ уравненіи (C) назначаемъ

$$P = 0$$

а изъ всѣхъ силъ Q выберемъ одну, приложенную въ нѣкоторомъ узлѣ и равную единицѣ. Вычисленное для этого случая Δ_1 дастъ соотвѣтствующую ординату линіи вліянія. Тоже нужно повторить для другихъ положеній подвижнаго груза. Конечно каждый разъ нужно въ уравненіе (C) вставлять ту величину X, которая соотвѣтствуетъ положенію подвижнаго груза; эти величины извѣстны, если предварительно, для опредѣленія X, была построена линія вліянія для этой неизвѣстной.

Что касается до пріема, изображаемаго уравненіемъ (B), то примѣненіе его потребуетъ опредѣленія *и напряженій и перемѣщеній узловъ*. Слѣд. пріемъ этотъ даетъ болѣе сложное рѣшеніе чѣмъ два предыдущіе, а потому онъ и не примѣняется.

ГЛАВА VI.

Теорема Кастиліано.

96. Чтобы дать предварительное представленіе объ этой важной теоремѣ, разсмотримъ слѣдующій простой случай. Пусть наши координаты, опредѣляющія положеніе системы, будутъ *главныя*, т. е. онѣ подобраны такъ, что потенціальная энергія содержитъ только квадраты координатъ и не заключаетъ ихъ произведеній. Въ n^0 46 мы приводили примѣръ такихъ координатъ.

И такъ пусть потенціальная энергія V изображается слѣдующей функціей перемѣщеній

$$\varphi, \psi, \theta, \ldots .$$

$$V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\theta^2 + \ldots .$$

Тогда внѣшнія силы

$$\Phi, \Psi, \Theta \ldots ,$$

какъ производныя V по соотвѣтствующимъ координатамъ, изобразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2a \,.\, \varphi \\ \Psi &= \frac{\partial V}{\partial \psi} = 2b \,.\, \psi \\ \Theta &= \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2c \,.\, \theta \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots . (\alpha).$$

Каждая сила оказывается зависящей только отъ своей, соотвѣтственной координаты, и не зависитъ отъ другихъ координатъ.

Изъ уравненій (α) мы можемъ опредѣлить координаты въ зависимости отъ силъ и получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2a}\cdot\Phi \\ \psi &= \frac{1}{2b}\cdot\Psi \\ \theta &= \frac{1}{2c}\cdot\Theta \\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\beta).$$

Вставимъ эти величины въ выраженіе потенціальной энергіи V. Получимъ:

$$V = \frac{1}{4a}\cdot\Phi^2 + \frac{1}{4b}\cdot\Psi^2 + \frac{1}{4c}\,\Theta^2 + \ldots\ldots$$

Такимъ путемъ мы получили новое выраженіе для потенціальной энергіи. Прежде она выражалась какъ функція координатъ. Теперь она выражается какъ функція отъ внѣшнихъ силъ. Но и новое выраженіе оказывается однородной функціей второй степени.

Возьмемъ производную V по одной изъ силъ Φ. Будетъ

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \frac{1}{2a}\cdot\Phi$$

Но, сравнивая съ уравненіями (β) видимъ, что это есть ничто иное какъ координата φ, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi} = \psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = \theta$$

$$\ldots\ldots$$

Эти зависимости и составляютъ теорему Кастиліано:

Если потенціальная энергія выражена въ зависимости отъ силъ, то производныя ея по силамъ будутъ представлять соотвѣтствующія координаты.

Теорема эта представляетъ полное соотвѣтствіе съ теоремой Лагранжа, указанной нами во II главѣ. Тамъ потенціальная энергія выражалась въ зависимости отъ координатъ, и производныя ея по координатамъ давали силы соотвѣтствующихъ типовъ. Здѣсь потенціальная энергія выражается въ зависимости отъ силъ, а производныя ея по силамъ будутъ координаты соотвѣтствующаго типа.

Но теорема II-й главы есть общая теорема, справедливая при всякомъ видѣ функціи, выражающей потенціальную энергію; требуется только, чтобы такая функція существовала, чтобы внутреннія силы имѣли потенціалъ. Между тѣмъ теорема Кастиліано тѣсно связана съ формой функціи, выражающей потенціальную энергію, и справедлива только для того случая, когда V есть однородная функція второй степени, т. е. только для упругихъ силъ.

97. И въ разныхъ другихъ областяхъ науки, гдѣ выводы связаны съ существованіемъ однородной функціи втораго порядка, получаются соотношенія аналогичныя теоремѣ Кастиліано. Напр. вернемся къ указанному въ n^0 65 вопросу о дѣйствіи мгновенныхъ силъ, гдѣ играетъ роль живая сила, представляющаяся однородной функціей втораго порядка отъ скоростей. Мы указали, что производныя живой силы по скоростямъ дадутъ соотвѣтствующіе импульсы. Но живую силу можно выразить въ зависимости отъ импульсовъ; причемъ получится опять однородная функція второй степени. Производныя этой функціи по импульсамъ представятъ скорости соотвѣтствующаго типа [1]).

98 Доказательство теоремы Кастиліано. Мы видѣли, что въ случаѣ когда имѣемъ *главныя координаты*, то теорема эта получается какъ непосредственный результатъ, вытекающій прямо изъ разсмотрѣнія и сравненія формулъ. Докажемъ теперь справедливость этой формулы въ общемъ случаѣ, когда координаты *не* главныя, т. е. функція

$$V,$$

содержитъ не только квадраты, но и произведенія координатъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta,\ \ldots$$

Легче всего можно доказать это путемъ измѣненія координатъ. Возьмемъ новыя координаты

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \theta_1,\ \ldots$$

связанныя съ прежними координатами линейными зависимостями:

---

[1]) См. Lord Kelvin and Tait, Treatise on Natural Philosophy. Part I. p. 289—290.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = A\varphi_1 + B\psi_1 + C\theta_1 + \dots \\ \psi = A'\varphi_1 + B'\psi_1 + C'\theta_1 + \dots \\ \theta = A''\varphi_1 + B''\psi_1 + C''\theta_1 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (A)$$

Мы видѣли, въ n^0 46, что тогда и новыя силы

$$\Phi_1,\ \Psi_1,\ \Theta_1, \dots$$

будутъ связаны съ прежними силами тоже линейными зависимостями:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 = A\Phi + A'\Psi + A''\Theta + \dots \\ \Psi_1 = B\Phi + B'\Psi + B''\Theta + \dots \\ \Theta_1 = C\Phi + C'\Psi + C''\Theta + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (B)$$

Коеффиціенты

$$A,\ B,\ C, \dots$$

подберемъ такъ, что послѣ подстановки формулъ (A), въ общее выраженіе потенціальной энергіи:

$$V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\theta^2 + \dots +$$
$$+ a'\varphi\psi + b'\varphi\theta + c'\psi\theta + \dots,$$

въ этомъ выраженіи уничтожатся всѣ члены съ произведеніями координатъ, и останутся только члены съ квадратами координатъ. Тогда новыя координаты будутъ главныя, и для нихъ теорема Кастиліано справедлива. То есть получимъ условія:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi_1} = \varphi_1;\ \frac{\partial V}{\partial \Psi_1} = \psi_1;\ \frac{\partial V}{\partial \Theta_1} = \theta_1 \dots (C)$$

Далѣе изъ уравненій (B) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Phi} = A;\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Psi} = A';\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta} = A'' \dots \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Phi} = B;\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Psi} = B';\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Theta} = B'' \dots \end{array}\right\} (D)$$

Вернемся теперь къ прежнимъ координатамъ и силамъ, и найдемъ величину

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi}$$

Такъ какъ сила Φ есть нѣкоторая функція новыхъ силъ

$$\Phi_1,\ \Psi_1,\ \Theta_1, \ldots \ldots;$$

то получаемъ

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \frac{\partial V}{\partial \Phi_1} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Phi} + \frac{\partial V}{\partial \Psi_1} \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Phi} + \frac{\partial V}{\partial \Theta_1} \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \Phi} + \ldots \ldots$$

Или, пользуясь условіями (D) и (C) находимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi_1 A + \psi_1 B + \theta_1 C + \ldots \ldots \quad (E).$$

А сравнивая вторую часть послѣдняго уравненія съ первой строчкой системы (A), получаемъ:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi$$

т. е. и для первоначальныхъ координатъ соблюдается то условіе, которое составляетъ теорему Кастиліано. Такимъ же путемъ получимъ и остальныя условія:

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi} = \psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = \theta \text{ и т. д.}$$

И такъ теорема Кастиліано доказана для общаго случая.

99. Другое доказательство теоремы Кастиліано. Какъ мы уже упоминали, она вытекаетъ изъ того, что потенціальная энергія выражается функціей второй степени отъ координатъ. Слѣдствіемъ этой формы V получается, что силы выражаются функціями первой степени координатъ: (см. главу II, n^0 34).

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2a\varphi + a'\psi + b'\theta + \ldots \ldots \\
\Psi &= a'\varphi + 2b\psi + c'\theta + \ldots \ldots \\
\Theta &= b'\varphi + c'\psi + 2c\theta + \ldots \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Разрѣшимъ эту систему уравненій первой степени, относительно неизвѣстныхъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta, \ldots \ldots$$

Тогда получимъ величины ихъ выражающіяся функціями первой степени отъ силъ:

$$\varphi = A\Phi + B\Psi + C\Theta + \ldots\,.$$

$$\psi = A'\Phi + B'\Psi + C'\Theta + \ldots\,.$$

А подставляя только что полученныя формулы для φ, ψ,.... въ выраженіе для V убѣдимся, что V выражается однородной функціей отъ силъ

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta,\ \ldots\,.\ ^{1)}$$

Найдя это возьмемъ теорему Клапейрона (глава II n^0 43).

$$2V = \Phi\varphi + \Psi\psi + \Theta\theta + \ldots\,.$$

Выразимъ въ ней какъ V, такъ и координаты φ, ψ, θ,.... въ функціи отъ силъ, такъ что обѣ части равенства будутъ функція силъ. Затѣмъ найдемъ приращеніе

$$\delta V,$$

получающееся, когда перемѣнная Φ получитъ приращеніе

$$\delta\Phi,$$

а прочія перемѣнныя

$$\Psi,\ \Theta,\ \ldots\,.$$

сохранять прежнія свои величины.

Когда Φ получитъ приращеніе

$$\delta\Phi,$$

то координаты

$$\varphi,\ \psi,\ \theta,\ \ldots\,,$$

какъ функціи Φ, получатъ приращенія

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi}\cdot\delta\Phi$$

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\Phi}\cdot\delta\Phi$$

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\Phi}\cdot\delta\Phi$$

$$\ldots\ldots$$

---

[1]) Въ n^0n^0 38—40 второй главы читатель найдетъ примѣры такого преобразованія.

Приращеніе энергіи ∂V опредѣляется элементарной работой силъ, т. е. суммой произведеній изъ силъ на приращенія координатъ, и будетъ

$$\partial V = (\Phi + \partial\Phi) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} \cdot \partial\Phi + \Psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} \cdot \partial\Phi + \ldots.$$

Чтобы найти производную отъ V по Φ, нужно взять предѣлъ отношенія

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi}$$

При нахожденіи предѣла конечно должны быть отброшены величины втораго порядка, и мы получимъ

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi} = \Phi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} + \Psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} + \Theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\Phi} + \ldots. \quad (\gamma)$$

Но мы можемъ получить производную

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi}$$

и другимъ путемъ, а именно изъ уравненія Клапейрона. Дифференцируя его по Φ, находимъ:

$$2 . \frac{\partial V}{\partial\Phi} = \varphi + \Phi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} + \Psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} + \Theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\Phi} + \ldots. \quad (\delta)$$

Сравнивая эти два результата (γ) и (δ) для

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi}$$

видимъ что должно быть

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi} = \varphi$$

Точно также докажемъ, что

$$\frac{\partial V}{\partial\Psi} = \psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial\Theta} = \theta$$

$$\ldots.$$

Слѣд. теорема Кастиліано доказано совершенно общимъ образомъ [1]).

[1]) Доказательство это заимствовано нами изъ журнала Engineering. 1894 г. статья: Statically indeterminate Structures and the Principle of Least Work.

100. Еще одно доказательство той же теоремы. Мы вкратцѣ только намѣтимъ ходъ этого доказательства. Оно интересно въ томъ отношеніи, что изъ него яснѣе всего убѣждаемся въ чисто алгебрическомъ характерѣ теоремы Кастиліано [1]).

По прежнему начнемъ съ напоминанія, что силы суть производныя потенціальной функціи по координатамъ:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 2a\varphi + a'\psi + b'\theta + \ldots \\ \Psi &= a'\varphi + 2b\psi + c'\theta + \ldots \\ \Theta &= b'\varphi + c'\psi + 2c\theta + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Происхожденіе этихъ формулъ объясняетъ то обстоятельство, что здѣсь въ разныхъ строчкахъ получаются одинаковые коеффиціенты. Такъ въ первой и второй строчкахъ есть одинъ и тотъ коеффиціентъ

$$a';$$

Онъ получился отъ члена

$$a'\varphi \,.\, \psi,$$

входившаго въ потенціальную функцію. Точно также видимъ въ первой и третьей строкахъ одинаковые коеффиціенты b', происшедшіе отъ дифференцированія члена

$$b'\varphi \,.\, \theta.$$

Во второй и третьей строкахъ есть одинаковые коеффиціенты c'. появившіеся при дифференцированіи члена

$$c'\psi \,.\, \theta$$

и т. д.

Эти равенства между коеффиціентами мы можемъ написать иначе, замѣчая, что каждый коеффиціентъ есть производная силы по нѣкоторой координатѣ. Такъ a' есть производная силы Φ по ψ; b' есть производная той же силы по θ и т. д. Обозначая коеффиціенты помощію такихъ производныхъ, выразимъ указанныя равенства такимъ образомъ:

---

[1]) Это доказательство почти вполнѣ согласуется съ тѣмъ, которое предложено у Томсона и Тэта, при изложеніи теоріи упругости. См. Treatise on Natural Philosophy. Part II. p. 213—216 (или стр. 203—205 II-й части нѣмецкаго перевода этого трактата). Такое же доказательство соотвѣтствующей теоремы Общей Динамики см. въ той же книгѣ Part I. p. 289—290 (или стр. 247—248 первой части нѣмецкаго перевода).

$$\text{равенство коефф. } a'\colon \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$$

$$\text{равенство коефф. } b'\colon \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}$$

$$\text{равенстно коефф. } c'\colon \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Theta}{\partial\psi}$$

$$\cdots\cdots$$

и т. д.

Затѣмъ мы знаемъ, что разрѣшая уравненія (52), мы получаемъ выраженія для координатъ въ зависимости отъ силъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A.\Phi + B.\Psi + C.\Theta + \ldots \\ \psi &= A'\Phi + B'\Psi + C'\Theta + \ldots \\ \theta &= A''\Phi + B''\Psi + C''\Theta + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Теорія опредѣлителей показываетъ, что замѣченное нами равенство коеффиціентовъ уравненій (52), вызываетъ совершенно соотвѣтствующее равенство коеффиціентовъ новой группы уравненій (53) [1]. По прежнему обозначая коеффиціенты черезъ производныя, будемъ имѣть соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} B &= A' \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\Psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} \\ C &= A'' \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} = \frac{\partial\theta}{\partial\Phi} \\ C' &= B'' \quad \text{или} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\Theta} = \frac{\partial\theta}{\partial\Psi} \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

и т. д. [2]).

[1]) Примѣры можно видѣть въ n^0n^0 38—40 второй главы.

[2]) Эти равенства между коеффиціентами легко могутъ быть доказаны другимъ путемъ, а именно помощію теоремы взаимности. Для этого возьмемъ два слѣдующія случая дѣйствія силъ:

Первый случай. Сила $\Phi_1=1$; всѣ прочія силы нули. При этомъ будетъ $\psi_1=A'$; значенія другихъ координатъ намъ ненужны,

Второй случай. Сила $\Psi_2=1$ всѣ прочія силы равны нулю. Тогда $\Phi_2=B$, а значенія другихъ координатъ намъ ненужны.

Составляя уравненіе взаимности получаемъ:

$$B = A'$$

Подобнымъ же образомъ получимъ и другія равенства (54).

Теперь для доказательства теоремы Кастиліано, возьмемъ уравненіе Клапейрона

$$2V = \Psi\psi + \Phi\varphi + \Theta\theta + \ldots,$$

выразимъ въ немъ V и координаты въ функціи отъ силъ, и продифференцируемъ его по Φ. Получимъ:

$$2 \cdot \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} + \Psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} + \Theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \Phi} + \ldots$$

Пользуясь уравненіями (54) получимъ:

$$2 \cdot \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi + \Phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} + \Psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Psi} + \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \ldots$$

$$= \varphi + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} \cdot \Phi + \frac{\partial \varphi}{\partial \Psi} \cdot \Psi + \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \cdot \Theta + \ldots\right]$$

Выраженіе стоящее въ скобкахъ есть полный дифференціалъ φ, взятый по перемѣннымъ

$$\Phi,\ \Psi,\ \Theta, \ldots$$

т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} \cdot \partial \Phi + \frac{\partial \varphi}{\partial \Psi} \cdot \partial \Psi + \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \cdot \partial \Theta + \ldots,$$

съ замѣной дифференціаловъ этихъ перемѣнныхъ самыми величинами перемѣнныхъ. По Эйлеровой теоремѣ объ однородныхъ функціяхъ, такое выраженіе равно самой функціи φ, умноженной на степень ея однородности. Но φ есть функція первой степени; слѣд. выраженіе стоящее въ скобкахъ равно φ [1]). И такъ имѣемъ

$$2 \cdot \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi + \varphi = 2\varphi$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi$$

Точно также докажемъ, что

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi} = \psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Theta} = \theta$$

и т. д.

Такимъ образомъ получаемъ теорему Кастиліано.

---

[1]) Конечно такой результатъ *для функціи первой степени* можно получить и непосредственно, не прибѣгая къ помощи теоремы Эйлера.

101. Историческая замѣтка. Теорема Кастиліано была выведена имъ въ концѣ семидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія, и тогда же приложена по рѣшенію различныхъ вопросовъ Строительной Механики. Но частный видъ ея, относящійся къ произвольному упругому тѣлу, имѣется уже въ сочиненіи W. Thomson and Tait. Treatise on Natural Philosophy [1]), первое изданіе котораго вышло въ 1867 г. Вѣроятно можно найти и болѣе раннія указанія на эту теорему.

102. Приложенія теоремы Кастиліано. Она даетъ простой способъ нахожденія перемѣщеній и измѣненій формы. Желая примѣнить ее, нужно помнить, что при этомъ потенціальная энергія должна быть выражена въ функціи отъ внѣшнихъ силъ, разсматриваемыхъ какъ независимыя перемѣнныя.

Если бы мы желали рѣшить вопросъ объ измѣненіи фигуры фермы общимъ образомъ, то слѣдовало бы поступить такимъ образокъ:

Предположимъ, что въ каждомъ узлѣ фермы, если она плоская, приложено по двѣ нагрузки—вертикальная и горизонтальная. Чтобы не смѣшать нагрузки, приходящіяся на разные узлы, надлежитъ употребить такое буквенное обозначеніе нагрузокъ, которое позволяло бы легко ихъ различать одну отъ другой. Напр. для узловъ n^0

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

назовемъ вертикальныя нагрузки буквами

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ldots$$

а горизонтальныя—буквами

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3\ \ldots\ldots$$

При такомъ обозначеніи выразимъ потенціальную энергію V для этой нагрузки; полученное выраженіе позволитъ найти перемѣщеніе любаго узла. Напр. вертикальное перемѣщеніе узла 2 будетъ

$$\frac{\partial V}{\partial P_2};$$

горизонтальное перемѣщеніе узла 3 будетъ

$$\frac{\partial V}{\partial Q_3}$$

и т. д.

---

[1]) Part. II p. 673 или T. II. s. 203 нѣмецкаго перевода.

Но въ такомъ общемъ рѣшеніи рѣдко встрѣчается надобность. Обыкновенно достаточно знать перемѣщенія только для нѣкоторой опредѣленной нагрузки, и притомъ не для всѣхъ узловъ, а лишь для одного или небольшаго числа узловъ. Тогда можно рѣшить вопросъ гораздо проще, разсматривая прямо и непосредственно тотъ частный случай, который насъ интересуетъ. При этомъ иногда придется прибѣгать къ введенію фиктивныхъ нагрузокъ.

103. Введеніе фиктивныхъ внѣшнихъ силъ. Иногда требуется опредѣлить въ фермѣ перемѣщеніе такого узла, къ которому не приложено вовсе внѣшней силы. Или вообще: требуется опредѣлить такую изъ обобщенныхъ координатъ, соотвѣтствующая которой сила вовсе не приложена къ системѣ. По теоремѣ Кастиліано, каждое перемѣщеніе получается въ видѣ производной отъ потенціальной энергіи по соотвѣтствующей силѣ; но въ указанныхъ случаяхъ этой силы вовсе нѣтъ, и она не входитъ въ выраженіе потенціальной энергіи.

Это затрудненіе устраняется очень легко. Нужно только намного обобщить задачу, прибавить къ числу заданныхъ силъ еще фиктивную силу, которой намъ не достаетъ, т. е. силу соотвѣтствующую искомому перемѣщенію. Затѣмъ найдя, по теоремѣ Кастиліано, искомое перемѣщеніе въ этомъ случаѣ, нужно перейти къ заданному частному случаю, и положить, что прибавленная фиктивная сила равна нулю.

104. Примѣры. Пусть напр. имѣемъ мостовую ферму (фиг. 52), у которой нагружены нижніе узлы, а требуется найти вертикальное перемѣщеніе какого нибудь изъ верхнихъ узловъ m. Тогда къ дѣйствительнымъ нагрузкамъ P, прибавимъ въ узлѣ m фиктивную вертикальную нагрузку Q. Составимъ выраженіе для потенціальной энергіи V, и продифференцируемъ его по Q. Затѣмъ въ этой производной положимъ

$$Q = 0.$$

105. Также поступимъ для нахожденія перемѣщенія средней точки m фермы (фиг. 53). Кромѣ истинныхъ нагрузокъ P, приложенныхъ въ нижнихъ узлахъ, приложимъ нѣкоторую нагрузку Q въ точкѣ m. Если силы P распредѣлены симметрично, то напряженія отъ нихъ въ брускахъ a, b равны нулю. Для этихъ двухъ брусковъ получается напряженіе только отъ силы Q, и потенціальная энергія ихъ пропорціональна Q^2. Но такъ какъ, послѣ дифференцированія, положимъ

$$Q = 0,$$

то члены, происходящіе отъ a и b, исчезнуть: поэтому нѣтъ никакой надобности вводить ихъ въ выраженіе для V.

106. Еще примѣры. Требуется найти горизонтальное перемѣщеніе конца B фермы по опорѣ (фиг. 54). Нагрузка производится вертикальными силами P.

Здѣсь нужно прибавить фиктивную горизонтальную силу Q. Производная отъ V по Q дастъ горизонтальное перемѣщеніе точки B въ общемъ случаѣ. Затѣмъ переходимъ къ частному заданію, полагая

$$Q = 0.$$

Также нужно поступить и для опредѣленія горизонтальнаго перемѣщенія вершины крана A (фиг 55). Здѣсь, кромѣ истинной нагрузки P, вводимъ фиктивную горизонтальную силу

$$Q.$$

107. Къ прибавленію фиктивныхъ силъ приходится прибѣгать и въ тѣхъ случаяхъ когда имѣемъ нѣсколько одинаковыхъ нагрузокъ. Напр. въ случаѣ фиг. 56 всѣ нагрузки P на нижніе узлы одинаковы. Въ выраженіи потенціальной энергіи всѣ эти силы P будутъ смѣшаны между собою, и будетъ трудно отличить одну силу отъ другой. Чтобы, тѣмъ не менѣе, правильно опредѣлить пониженіе опредѣленнаго узла, напр. m, прибавимъ въ этомъ узлѣ фиктивную нагрузку Q, которая войдетъ въ составъ потенціальной энергіи Затѣмъ находимъ производную V по Q, и наконецъ получивъ общую величину этой производной, дѣлаемъ въ ней частную подстановку

$$Q = 0$$

Результатъ будетъ пониженіе узла m.

Задача. Найти вертикальное перемѣщеніе узла m для случая фиг. 56.

Опредѣлимъ отдѣльно напряженія брусковъ фермы для двухъ случаевъ: a) когда дѣйствуютъ всѣ нагрузки P; b) когда дѣйствуетъ только нагрузка Q. Напряженія какого нибудь изъ брусковъ для перваго изъ этихъ двухъ случаевъ назовемъ черезъ T_1, а для втораго черезъ

$$a \cdot Q.$$

Полное напряженіе будетъ

$$T_1 + aQ;$$

слѣд. потенціальная энергія всей фермы выразится суммою членовъ

$$\sum \frac{l}{2E\omega} \cdot (T_1 + aQ)^2$$

Дифференцируя ее по Q, и затѣмъ полагая $Q = 0$, получимъ пониженіе узла

$$\delta = \sum \frac{l}{E\omega} \cdot T_1 \, . \, a.$$

Такой же результатъ мы уже получили въ n^0 60.

108. Слѣдуетъ ли, примѣняя теорему Кастиліано, включать въ составъ функціи V потенціальную энергію лишнихъ частей?

Такъ какъ этотъ простой вопросъ иногда возбуждаетъ сомнѣнія, то посвятимъ ему нѣсколько строкъ.

Изъ вывода теоремы ясно, что функція V представляетъ полную энергію *всей* системы, конечно со включеніемъ въ нее и лишнихъ частей. Это включеніе имѣетъ значеніе, когда ищемъ перемѣщеніе x, отвѣчающее одной изъ лишнихъ силъ X, замѣняющей присутствіе лишней части фермы, и когда слѣдовательно будемъ дифференцировать по X, считая ее за одну изъ внѣшнихъ силъ.

Но когда мы ищемъ перемѣщенія, отвѣчающія заданнымъ внѣшнимъ нагрузкамъ, напр. вертикальныя и горизонтальныя перемѣщенія узловъ фермы, то будемъ дифференцировать V по одной изъ этихъ нагрузокъ. Прочія нагрузки, а также всѣ напраженія лишнихъ частей, при этомъ должны считаться постоянными. А при такомъ условіи производныя членовъ, представляющихъ энергію лишнихъ частей, обратятся въ нули. Слѣдовательно, имѣя это въ виду, можно и не включать вовсе эти члены въ выраженіе V. Ошибки отъ этого не произойдетъ.

109. Этому математическому результату соотвѣтствуетъ слѣдующее реальное соображеніе. Измѣненіе фигуры фермы вполнѣ опредѣляется измѣненіями необходимыхъ ея частей, и нѣтъ надобности къ этому присоединять еще измѣненіе лишнихъ частей.

110. Для большаго выясненія дѣла, мы можемъ подойти къ вопросу еще иначе. Положимъ

$$\Phi$$

есть одна изъ внѣшнихъ силъ и мы ищемъ перемѣщеніе

$$\varphi$$

ей отвѣчающее. Слѣдовательно будемъ находить производную отъ V по Ф. Но напряженіе какого нибудь лишняго бруска X есть функція внѣшнихъ силъ, слѣд. функція отъ Ф. По этому, находя производную V по Ф, нужно принять во вниманіе не только члены, въ которые Ф входитъ явнымъ образомъ, но и члены съ X, который есть неявная функція Ф.

Поэтому полная производная V по Ф получится, когда къ явной производной

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \Phi}\right)$$

прибавимъ членъ

$$\frac{\partial V}{\partial X} \cdot \frac{dX}{d\Phi}$$

Но мы увидимъ, въ слѣдующей главѣ, что всегда будетъ

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

слѣд. нѣтъ надобности обращать вниманіе на эту прибавку.

111. Сказанное здѣсь не означаетъ, что измѣненіе фигуры вовсе не зависитъ отъ присутствія лишнихъ частей и ихъ напряженій. Эти напряженія входятъ въ формулы, представляющія энергію необходимыхъ частей, а потому не исчезнутъ въ выраженіяхъ для перемѣщеній, несмотря на отбрасываніе тѣхъ членовъ, которые изображаютъ потенціальную энергію лишнихъ частей.

112. Примѣръ. Возьмемъ опять арку съ затяжкой (фиг. 57), нагруженную грузами P въ верхнихъ узлахъ. Единственную лишнюю неизвѣстную—напряженіе затяжки—назовемъ X.

Пусть требуется опредѣлить перемѣщеніе x, соотвѣтствующее этому X, т. е. измѣненіе разстоянія пятокъ A, B, а также вертикальное перемѣщеніе δ средняго верхняго узла m фермы. Для нахожденія δ предположимъ, что кромѣ заданныхъ нагрузокъ P, въ узлѣ m дѣйствуетъ еще нагрузка Q, которую, по окончаніи вычисленія, положимъ равной нулю.

Для составленія выраженія энергіи V, намъ нужно знать напряженія T необходимыхъ брусковъ фермы. Эти напряженія могутъ быть разсматриваемы какъ происходящія отъ совокупности трехъ причинъ:

a) нагрузокъ P

b) нагрузки Q.

c) силъ $X, -X$.

Полная сила T равна суммѣ напряженій происходящихъ отъ этихъ трехъ причинъ. Тѣ части T, которыя вызываются силою Q, и силами X, пропорціональны этимъ внѣшнимъ силамъ. Такимъ образомъ получимъ:

$$T = T_1 + QT_2 + XT_3$$

Здѣсь T_1 означаетъ напряженія отъ нагрузокъ P, въ предположеніи что Q и X суть нули, (см. фиг. 57 I).

T_2—представляетъ напряженія для случая когда $Q=1$, а силы P и X нули (фиг. 57 II).

Наконецъ T_3—представляетъ напряженія для случая (фиг. 57 III) когда $X=1$, а Q и P—нули.

Значенія

$$T_1,\ T_2,\ T_3,$$

легко опредѣляются, помощію построенія діаграммъ для случаевъ I, II и III.

Внутренняя энергія любаго изъ необходимыхъ брусковъ фермы будетъ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{T^2 l}{E\omega} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(T_1 + QT_2 + XT_3)^2 . l}{E\omega}$$

Сложимъ энергіи всѣхъ необходимыхъ брусковъ, и прибавимъ энергію затяжки, т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{X^2 L}{E\Omega}.$$

Въ результатѣ получимъ полную энергію всей фермы:

$$V = \frac{1}{2}\sum\frac{l}{E\omega}\cdot(T_1 + QT_2 + XT_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{X^2 . L}{E\Omega}$$

Чтобы получить измѣненіе разстоянія AB, нужно взять производную отъ V по силѣ X; нагрузку Q можемъ считать нулемъ. Мы получаемъ:

$$x = \frac{\partial V}{\partial X} = \sum\frac{l}{E\omega}\cdot(T_1 + XT_3)\ T_3 + \frac{X . L}{E\Omega} =$$

$$= \sum\frac{l}{E\omega}\cdot T_1\cdot T_3 + X\left[\sum\frac{l}{E\omega}\cdot T_3^{\,2} + \frac{L}{E\Omega}\right]$$

Для нахожденія вертикальнаго перемѣщенія узла m, нужно найти производную отъ V по Q; при этомъ членъ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{X^2 . L}{E\Omega}$$

можетъ быть отброшенъ съ самаго начала. А послѣ окончанія дифференцированія нужно положить

$$Q = 0$$

По этому правилу получаемъ:

$$\delta = \sum \frac{l}{E\omega} (T_1 + XT_3).\ T_2 = \sum \frac{l}{Ea} \cdot T_1 . T_2 + X \sum \frac{l}{E\omega} \cdot T_3 . T_2$$

Конечно предварительно должна быть опредѣлена неизвѣстная X.

Примѣръ. Грузъ P виситъ на трехъ цѣпяхъ (фиг. 58а), Требуется найти пониженіе точки привѣса. Всѣ три цѣпи имѣютъ одинаковое поперечное сѣченіе.

Здѣсь имѣется одна лишняя неизвѣстная, такъ какъ уравненій равновѣсія два, а цѣпей три (или, если все симметрично относительно вертикали, какъ у насъ, то имѣемъ двѣ неизвѣстныя и одно уравненіе). За лишнюю неизвѣстную примемъ напряженіе X вертикальной цѣпи. Тогда напряженія наклонныхъ цѣпей будутъ:

$$\frac{(P - X)}{2 . Cos\, \alpha}$$

Ихъ энергія представится выраженіемъ:

$$V = 2 \cdot \frac{(P - X)^2}{4\, Cos^2\, \alpha} \cdot \frac{l}{2E\omega . Cos\, \alpha}$$

Вертикальное перемѣщеніе точки подвѣса груза P будетъ

$$P = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{P - X}{2 . Cos^3 \alpha} \cdot \frac{l}{E\omega}$$

Сюда нужно вставить величину X. Для опредѣленія ея примѣнимъ способъ Мора. Полагая (фиг. 58b) X=1, найдемъ напряженія наклонныхъ цѣпей:

$$-\frac{1}{2 . Cos\, \alpha}$$

(знакъ *минусъ* означаетъ сжатіе).

Комбинируя силы случая (фиг. 58b) и удлиненія для случая (фиг. 58a) получаемъ:

$$-1 \cdot \frac{Xl}{E\omega} + \frac{2}{2\,.\,Cos\,\alpha} \cdot \frac{P - X}{2\,.\,Cos\,\alpha} \cdot \frac{l}{Cos\,\alpha} \cdot \frac{1}{E\omega} = 0$$

откуда:

$$X = \frac{P}{1 + 2\,.\,Cos^3\,\alpha}\,;\; P - X = \frac{2\,.\,Cos^3\,\alpha}{1 + 2\,Cos^3\,\alpha}\,P.$$

Слѣд. перемѣщеніе

$$p = \frac{1}{1 + 2\,.\,Cos^3\,\alpha} \cdot \frac{Pl}{E\omega}$$

Этотъ результатъ согласуется съ тѣмъ, который получимъ прямо взявъ удлиненіе l вертикальной цѣпи отъ груза X.

ГЛАВА VII.

Начало наименьшей работы.

113—127

113. Доказательство этой теоремы. Эта теорема имѣетъ особое значеніе въ нашемъ вопросѣ, такъ какъ даетъ очень простой пріемъ для нахожденія лишнихъ неизвѣстныхъ. Она представляетъ собою прямое слѣдствіе теоремы Кастиліано и также опредѣляется формой потенціальной энергіи упругихъ тѣлъ, т. е. тѣмъ обстоятельствомъ, что эта энергія есть однородная функція второй степени.

Та лишняя неизвѣстная, которую желаемъ опредѣлить, должна считаться внѣшней силой, и потенціальная энергія системы должна быть выражена въ функціи внѣшнихъ силъ, какъ это требуется теоремой Кастиліано. Дифференцируя потенціальную энергію по лишней неизвѣстной, получимъ соотвѣтствующее ей перемѣщеніе.

114. Сначала разсмотримъ тотъ случай, когда лишняя неизвѣстная есть одна изъ реакцій неподвижныхъ опоръ. Тогда соотвѣтствующее ей перемѣщеніе равно нулю. Называя потенціальную энергію черезъ V, а лишнюю неизвѣстную черезъ X, получимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

Но V есть функція второй степени отъ силъ; ея производная будетъ содержать неизвѣстную X въ первой степени. Слѣд. предыдущее уравненіе можетъ служить для нахожденія неизвѣстной X.

Если у насъ нѣсколько неизвѣстныхъ реакцій неподвижныхъ опоръ

$$X,\ Y,\ Z$$

то для каждой изъ нихъ получимъ такія же уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0;\ \frac{\partial V}{\partial Y} = 0;\ \frac{\partial V}{\partial Z} = 0.$$

Это будутъ совокупныя уравненія первой степени; число ихъ равно числу лишнихъ неизвѣстныхъ. Эти уравненія послужатъ для опредѣленія величинъ

$$X,\ Y,\ Z\ .\ .\ .\ .$$

115. Возьмемъ теперь другой случай. Лишняя неизвѣстная X есть не реакція опоры, а одно изъ напряженій лишнихъ брусковъ или вообще одно изъ лишнихъ внутреннихъ напряженій какой нибудь части нашей системы.

Отдѣлимъ эту часть отъ системы и присутствіе ея въ системѣ замѣнимъ силою X, которую считаемъ внѣшней силой, приложенной къ системѣ. Но не забудемъ и эту отдѣленную часть системы. На нее можно смотрѣть какъ на подверженную внѣшней силѣ противуположной X; ее назовемъ

$$-X.$$

Составимъ выраженіе потенціальной энергіи отдѣльно для выдѣленной части и для остальной системы. Эти двѣ потенціальныя энергіи назовемъ

$$V_1 \text{ и } V_2$$

а общую ихъ сумму, т. е. потенціальную энергію всей системы, включая и лишнюю часть, назовемъ черезъ V, такъ что

$$V = V_1 + V_2$$

Какъ V_1, такъ и V_2, должны быть выражены въ функціи внѣшнихъ силъ, включая въ ихъ число лишнюю силу X.

Сначала примѣнимъ теорему Кастиліано къ выдѣленной лишней части. Называя черезъ x перемѣщеніе отвѣчающее силѣ $-X$, получимъ

$$\frac{\partial V_1}{\partial(-X)} = x$$

Затѣмъ возьмемъ остальную систему. Дифференцируя ее по внѣшней силѣ X получимъ тоже перемѣщеніе x, какъ и прежде, т. е.

$$\frac{\partial V_2}{\partial X} = x$$

Соединяя эти два уравненія находимъ

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial X} = 0 \text{ или } \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

Если кромѣ неизвѣстной X есть еще другія лишнія неизвѣстныя

$$Y, Z \ldots .$$

то совершенно такимъ же образомъ получимъ

$$\frac{\partial V}{\partial Y}=0, \frac{\partial V}{\partial Z}=0 \ldots .$$

Это будутъ совокупныя уравненія первой степени, изъ которыхъ найдемъ неизвѣстныя

$$X, Y, Z \ldots .$$

116. И такъ получаемъ слѣдующее общее правило для нахожденія лишнихъ неизвѣстныхъ. Нужно выразить потенціальную энергію въ функціи внѣшнихъ силъ, причисляя къ нимъ лишнія силы, и затѣмъ написать, что производныя энергіи, по каждой изъ лишнихъ силъ отдѣльно, равны нулю.

Но мы написали бы такія же уравненія, если бы искали maximum, или minimum потенціальной энергіи, считая ее функціей лишнихъ неизвѣстныхъ. Слѣдовательно наше правило можно высказать иначе, а именно:

Нужно найти такія величины лишнихъ неизвѣстныхъ, которыя дѣлаютъ потенціальную энергію наибольшей или наименьшей. Это будутъ истинныя величины лишнихъ силъ. Такое правило и называется началомъ наименьшей работы.

117. Maximum или Minimum? Для нашего вопроса мало интересно будетъ ли энергія наибольшей или наименьшей. Уравненія наши въ обоихъ случаяхъ остаются одни и тѣ же. Только для объясненія названія теоремы укажемъ, что энергія будетъ наименьшей, а не наибольшей. Въ этомъ легко убѣдиться для случая, когда имѣемъ *одну* лишнюю неизвѣстную X. Такъ какъ потенціальная энергія есть функція второй степени отъ X, то она графически изобразится ординатами параболы съ вертикаьною осью. Но такъ какъ V всегда положительно, то парабола, ее изображающая, должна непремѣнно имѣть видъ A (фиг. 59). Виды же B и C не удовлетворяютъ вопросу. Слѣд. V не можетъ быть *maximum*, а непремѣнно *minimum* [1]).

[1]) Тоже можно доказать и для произвольнаго числа лишнихъ неизвѣстныхъ. Для этого замѣтимъ, что, такъ какъ число уравненій

$$\frac{\partial V}{\partial X}=0, \frac{\partial V}{\partial Y}=0 \ldots . (\delta)$$

равно числу неизвѣстныхъ, и уравненія эти всѣ первой степени, то мы получаемъ помощію ихъ только *одно* рѣшеніе. Если оно будетъ *maximum*, то всѣ

118. Случай когда опоры не вполнѣ неподвижны. Пусть опоры не вполнѣ неподвижны, а нѣсколько подаются подъ дѣйствіемъ силъ. Чтобы къ этому случаю примѣнить начало наименьшей работы, нужно поступить слѣдующимь образомъ. Въ составъ системы нужно ввести и опоры. Если они вполнѣ упруги [1]), то можно выразить ихъ потенціальную энергію и присоединить ее къ энергіи остальной системы. Тогда является возможность примѣнить начало наименьшей работы.

119. Случай когда расположеніе опоръ не соотвѣтствуетъ тому расположенію опорныхъ точекъ фермы, которое придано имъ при сборкѣ ея. Напр. мы собираемъ балку такъ, что нижній поясъ ея прямолинейный, а положимъ ее на три опоры A, B, C, изъ которыхъ средняя выше или ниже крайнихъ. Или соберемъ ферму $A\ B\ C$ (фиг. 60) и положимъ ее точками A, B, C, на три такія опоры, что средняя изъ нихъ находится ниже линіи крайнихъ не на величину h, а нѣсколько больше или меньше h. Или собравши двухшарнерную арочную ферму (фиг. 61) поставимъ ее на такія опоры, что разстояніе упорныхъ пятокъ будетъ нѣсколько больше или меньше чѣмъ AB.

Въ такихъ случаяхъ опорнымъ реакціямъ отвѣчаетъ нѣкоторое перемѣщеніе; въ первомъ нашемъ примѣрѣ оно равно повышенію или пониженію средней опоры относительно линіи крайнихъ опоръ, въ послѣднемъ примѣрѣ оно равно разности между разстояніемъ опорныхъ пятокъ и разстояніемъ шарнеровъ AB.

Поэтому примѣняя теорему Кастиліано, мы не получимъ какъ въ n^0 115, нуль во второй части равенства; вмѣсто него должно получиться указанное выше перемѣщеніе. Называя его черезъ x, получимъ

$$\frac{\partial V}{\partial X} = x$$

И такъ здѣсь уравненіе не получаетъ такой формы какъ будто бы мы разыскивали *minimum* функціи V.

Конечно можно и эти случаи искусственнымъ образомъ подвести подъ форму начала наименьшей работы. Для этого нужно, кро-

---

другія значенія функціи V, для всѣхъ другихъ величинъ неизвѣстныхъ, должны быть меньше этого наибольшаго. Но мы сейчасъ можемъ указать на противурѣчіе этому; всегда можно придать перемѣннымъ такія значенія, что V обратится въ безконечность. Слѣд. значеніе ея, найденное помощію уравненій (δ), не можетъ быть *maximum*.

[1]) Такой случай иногда встрѣчается въ мостахъ и віадукахъ, поддерживаемыхъ высокими металлическими опорами.

мѣ дѣйствительныхъ частей фермы, ввести еще фиктивныя части, соединяющія ее съ опорами, и притомъ такія, что для нихъ производная потенціальной энергіи по X равна

$$-x.$$

Тогда наше уравненіе

$$\frac{\partial V}{\partial X} - x = 0$$

будетъ выражать условіе что потенціальная энергія всей системы, *со включеніемъ въ нее этихъ фиктивныхъ частей*, будетъ наименьшая.

Иногда прибѣгаютъ къ этому пріему [1]), но мы не видимъ въ этомъ никакой надобности, и разсмотрѣли этотъ случай только затѣмъ, чтобы еще лучше оттѣнить тѣсную связь начала наименьшей работы съ теоремой Кастиліано.

120. Историческая замѣтка. Начало наименьшей работы было найдено Менабреа и по словамъ его представлено Туринской Академіи наукъ въ 1857 году, а Парижской Академіи въ 1858 г.: но мемуаръ его былъ напечатанъ значительно позже, а именно въ 1868 г. Во всякомъ случаѣ работа эта была исполнена ранѣе появленія работъ Кастиліано, и потому нѣмецкіе авторы, (въ числѣ ихъ и Мюллеръ-Бреслау) неправильно приписываютъ открытіе этого начала Кастиліано. Доказательство Менабреа совершенно другое, чѣмъ предложенное здѣсь. Послѣ него было предложено много другихъ доказательствъ этого начала. Изъ русскихъ авторовъ, предлагавшихъ такія доказательства, укажемъ на И. А. Евневича [2]) и Х. С. Головина [3]).

121. Приложенія начала наименьшей работы. Оно очень удобно для нахожденія лишнихъ неизвѣстныхъ *въ особенности въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ дѣло съ постоянными нагрузками.*

Первый примѣръ. Криволинейная ферма съ затяжкой (фиг. 62). Здѣсь напряженіе затяжки есть лишняя неизвѣстная X.

Напряженія T остальныхъ брусковъ фермы составятся изъ двухъ слагаемыхъ: 1) напряженій T_1, получающихся только отъ нагрузокъ P, когда положимъ $X=0$; 2) напряженій, вызываемыхъ

---

[1]) Такъ напр. дѣлаетъ Мюллеръ-Бреслау, въ своемъ извѣстномъ сочиненіи: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. изд. 1886.

[2]) Извѣстія С.-Петербургскаго Технологическаго Института. 1877 года.

[3]) Инженерный Журналъ. 1883 года.

одной силой X; эти внутреннія силы пропорціональны X, и представятся выраженіемъ

$$X \,.\, T_2,$$

гдѣ T_2—напряженіе получающееся когда $X=1$, а всѣ P равны нулю.

Величины T_1, T_2 легко опредѣляются. Всего проще прибѣгнуть къ графическому построенію. Нужно построить двѣ діаграммы напряженій: 1) одну для случая, когда дѣйствуютъ заданныя нагрузки P, а сила $X=0$; 2) другую для случая, когда нагрузки P отсутствуютъ, а сила X равна единицѣ. Первая діаграмма дастъ величины всѣхъ T_1; а вторая—величины всѣхъ T_2. Истинное напряженіе будетъ

$$T = T_1 + XT_2.$$

Потенціальная энергія одного изъ брусковъ фермы будетъ

$$\frac{T^2 \,.\, l}{2E\omega} = (T_1 + XT_2)^2 \cdot \frac{l}{2E\omega}$$

(l—длина бруска, ω—площадь его сѣченія).

Потенціальную энергію всѣхъ брусковъ, входящихъ въ составъ серпа, означимъ суммой:

$$\sum (T_1 + X \,.\, T_2)^2 \cdot \frac{l}{E\omega}$$

Сюда нужно прибавить потенціальную энергію затяжки

$$\frac{X^2 \,.\, L}{2E\Omega},$$

тогда получимъ полную энергію всей системы

$$V = X^2 \cdot \frac{L}{2E\Omega} + \sum (T_1 + XT_2)^2 \frac{l}{2E\omega}.$$

Примѣняя начало наименьшей работы, находимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{XL}{E\Omega} + \sum (T_1 + XT_2) \cdot \frac{l}{E\omega} \cdot T_2 = 0$$

или

$$\frac{X \,.\, L}{E\Omega} + \sum T_1 T_2 \cdot \frac{l}{E\omega} + X \sum T_2^2 \cdot \frac{l}{E\omega} = 0$$

откуда получается X.

122. Второй примѣръ. Опредѣленіе натяженій большаго числа тягъ, которыми точка A прикрѣпляется къ неподвижному предмету, когда на точку A дѣйствуетъ нѣкоторая внѣшняя сила P (фиг. 63). Считаемъ, что всѣ тяги лежатъ въ одной плоскости.

Мы уже рѣшали этотъ вопросъ въ n^0 239 [1]), курса Сопротивленія Матеріаловъ и знаемъ, что Статика даетъ два уравненія

$$\Sigma\ T\ Cos\ \alpha - P\ Cos\ \varphi = 0\ .\ .\ .\ .\ (\alpha)$$

$$\Sigma\ T.\ Sin\ \alpha - P.\ Sin\ \varphi = 0\ .\ .\ .\ .\ (\beta)$$

гдѣ T—натяженіе любой изъ тягъ. Въ этой задачѣ число лишнихъ неизвѣстныхъ равно числу тягъ безъ двухъ. Опредѣлимъ неизвѣстныя помощію начала наименьшей работы.

Потенціальная энергія всѣхъ тягъ будетъ

$$V = \frac{1}{2} \Sigma \frac{T^2 . l}{E\omega}$$

Нужно исключить отсюда натяженія двухъ какихъ нибудь тягъ, помощію уравненій (α), (β), и затѣмъ искать minimum V. Такимъ образомъ мы здѣсь имѣемъ случай такъ называемаго относительнаго minimum, когда нужно найти наименьшую величину V, при условіи соблюденія уравненій (α) и (β). Какъ извѣстно, для рѣшенія такой задачи нужно искать minimum выраженія:

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{T^2 l}{E\omega} + \lambda (\Sigma\ T\, Cos\ \alpha - P\ Cos\ \varphi) + \mu (\Sigma\ T\ Sin\ \alpha -$$

$$- P\ Sin\ \varphi)\ .\ .\ .\ .\ (\gamma)$$

гдѣ λ, μ—вводимые нами коэффиціенты, которые будутъ опредѣлены, или исключены.

Наименьшая величина найдется, приравнивая нулю производныя отъ (γ) по каждой изъ неизвѣстныхъ T. Обозначимъ натяженія по порядку цифрами 1, 2, 3..., и придадимъ такіе же подстрочные знаки соотвѣтствующимъ величинамъ l, ω, α. Дифференцируя послѣдовательно по T_1 по T_2, и т. д., получимъ слѣдующій рядъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{T_1 l_1}{E\omega_1} + \lambda.\ Cos\ \alpha_1 + \mu.\ Sin\ \alpha_1 = 0 \\ \frac{T_2 l_2}{E\omega_2} + \lambda.\ Cos\ \alpha_2 + \mu.\ Sin\ \alpha_2 = 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (\delta).$$

[1]) См. В. Кирпичевъ. Сопротивленіе матеріаловъ. Часть II. n^0 239.

Число этихъ уравненій равно числу неизвѣстныхъ натяженій T. Присоединяя къ нимъ уравненія (α) и (β) будемъ имѣть совокупность уравненій, достаточную для нахожденія всѣхъ T, а также λ и μ.

Не трудно показать, что λ и μ взятые со знакомъ минусъ, представляютъ собою перемѣщенія точки A по направленіямъ x и y. Дѣйствительно, если перемѣщенія точки A по осямъ назвать черезъ δx, δy, то получимъ для каждой изъ тягъ уравненіе

$$l' - l = \delta x \, Cos\, \alpha + \delta y \, Sin\, \alpha$$

или

$$\frac{Tl}{E\omega} = \delta x.\ Cos\,\alpha + \delta y.\ Sin\,\alpha$$

Сравнивая его съ уравненіями (δ) убѣждаемся, что

$$\delta x = -\lambda,\ \delta y = -\mu.$$

И такъ здѣсь одновременно находимъ и всѣ неизвѣстныя напряженія, и измѣненіе фигуры нашей фермы.

123. Третій примѣръ. Найти давленіе средней опоры для случая равномѣрно распредѣленной нагрузки, при симметричномъ расположеніи трехъ опоръ. (фиг. 64).

Здѣсь одна лишняя неизвѣстная—давленіе средней опоры X. Если вся равномѣрно распредѣленная нагрузка есть $2P$, то давленія крайнихъ опоръ будутъ

$$P - \frac{X}{2}.$$

Моментъ изгиба, для сѣченія на разстояніи x отъ крайней опоры, равенъ

$$M = \left(P - \frac{X}{2}\right) x - \frac{P \,.\, x^2}{2l}$$

Слѣд. потенціальная энергія всего бруска представится формулой

$$V = 2\int_0^l \frac{M^2 \,.\, dx}{2EI} = \int_0^l \left[\left(P - \frac{X}{2}\right) x - \frac{P \,.\, x^2}{2l}\right]^2 \cdot \frac{dx}{EI}$$

Напишемъ, что производная V по X равна нулю. Получаемъ уравненіе

$$-2\int_0^l \left[\left(P-\frac{X}{2}\right)x-\frac{P\,.\,x^2}{2l}\right]\cdot\frac{\partial x}{EI}\cdot\frac{x}{2}=0$$

или

$$P\cdot\int_0^l x^2\,.\,\partial x-\frac{X}{2}\cdot\int_0^l x^2\,.\,\partial x-\frac{P}{2l}\cdot\int_0^l x^3\,.\,\partial x=0$$

то есть

$$P\cdot\frac{l^3}{3}-\frac{X}{2}\cdot\frac{l^3}{3}-\frac{P}{2l}\cdot\frac{l^4}{4}=0$$

откуда

$$X=\frac{5}{4}\cdot P.$$

124. Четвертый примѣръ. Общій случай неразрѣзной балки, лежащей на нѣсколькихъ опорахъ. Теорема о трехъ моментахъ. Когда имѣемъ балку, лежащую на большомъ числѣ опоръ, то число лишнихъ неизвѣстныхъ давленій равно числу опоръ безъ двухъ. Составляя уравненіе изгиба балки, и полагая, что прогибъ ея для каждой подпертой точки равенъ нулю, можно составить столько же уравненій, сколько имѣется неизвѣстныхъ давленій, которыя затѣмъ и опредѣляются. Но такой пріемъ рѣшенія ведетъ къ продолжительнымъ вычисленіямъ въ тѣхъ случаяхъ, когда число пролетовъ велико. Вычисленія дѣлаются утомительными, даже при небольшомъ числѣ пролетовъ, когда приходится изслѣдовать вліяніе значительнаго числа различныхъ возможныхъ нагрузокъ, что встрѣчается при разсчетѣ мостовъ, подвергающихся дѣйствію подвижныхъ грузовъ. Старанія облегчить нужныя для этого вычисленія повели къ открытію пріемовъ, значительно ускоряющихъ рѣшеніе. Изъ этихъ пріемовъ наиболѣе удобный доставляется такъ называемой *теоремой о трехъ моментахъ*. Здѣсь мы покажемъ, что эта теорема легко получается какъ слѣдствіе начала наименьшей работы. Но сначала сдѣлаемъ нѣсколько предварительныхъ объясненій.

Моменты изгиба на опорахъ. Упрощеніе здѣсь достигается введеніемъ вспомогательныхъ перемѣнныхъ, которыя опредѣляются значительно скорѣе, чѣмъ давленія опоръ. За эти перемѣнныя приняты моменты изгиба на опорахъ.

Моментомъ изгиба на какой-нибудь опорѣ мы назовемъ сумму моментовъ всѣхъ силъ, лежащихъ *лѣвѣе* этой опоры, относительно нейтральной линіи сѣченія, проведеннаго прямо надъ опорой. Этотъ моментъ, также какъ и всѣ другіе моменты изгиба, встрѣчающіеся въ этой главѣ, будемъ считать положительнымъ, если онъ вращаетъ по направленію часовой стрѣлки.

Если сдѣлаемъ разрѣзъ балки прямо надъ опорой A и отбросимъ лѣвую часть балки, то, какъ извѣстно, присутствіе отброшенной части можетъ быть замѣнено силами двухъ родовъ, приложенными къ сѣченію A: a) растягивающими и сжимающими (t); b) срѣзывающими (s). Моментъ силъ t для нейтральной оси сѣченія A численно равенъ, и одинаковъ по знаку съ моментомъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ лѣвѣе сѣченія A. Слѣдовательно, моментъ M всѣхъ силъ t и представляетъ то, что нами названо моментомъ на опорѣ. Онъ вмѣстѣ съ суммой S срѣзающихъ силъ вполнѣ замѣняетъ лѣвую часть балки. Силу S (такъ же, какъ и всѣ другія изгибающія и срѣзывающія силы, о которыхъ говоримъ въ этой главѣ), считаемъ *положительной*, когда она направлена *вверхъ*.

125. Выраженіе всѣхъ искомыхъ величинъ помощію моментовъ на опорахъ. Прежде всего покажемъ, что если моменты надъ опорами извѣстны, то помощію ихъ легко находятся всѣ величины, нужныя для изслѣдованія изгиба, а именно:

a) Моменты изгиба для любой точки балки.

b) Суммы срѣзающихъ силъ, тоже для каждой точки балки.

c) Давленія опоръ.

Для этого разсмотримъ одинъ какой-нибудь пролетъ неразрѣзной балки, лежащій между двумя произвольными опорами A, B (фиг. 65). Проведемъ сѣченія: a—лежащее правѣе опоры A, но очень близко къ ней; b—лежащее очень близко около опоры B, но лѣвѣе ея [1]). Разсмотримъ вырѣзанную такимъ образомъ часть балки, на которую между a и b дѣйствуетъ нѣкоторая внѣшняя нагрузка.

Моменты на опорахъ A, B назовемъ черезъ M и M'. Тогда дѣйствіе лѣвой части балки на правую, по сѣченію a, представится моментомъ M и срѣзающей силой S. Дѣйствіе правой отброшенной части на тѣло ab, по сѣченію b замѣняется моментомъ—M', и срѣзающей силой—S' [2]). Прибавивъ сюда внѣшнюю нагрузку, дѣйствую-

---

[1]) Мы дѣлаемъ разрѣзы не по самимъ опорамъ A, B, а нѣсколько въ сторону отъ нихъ съ тою цѣлью, чтобы исключить давленія опоръ.

[2]) Мы беремъ здѣсь отрицательный знакъ на томъ основаніи, что по условію M и M', S, S' означаютъ дѣйствіе *лѣвой* части на правую. Очевидно, обратныя дѣйствія *справа* будутъ изображаться моментами и суммами силъ той же численной величины, но обратнаго знака.

шую между опорами A, B, получимъ всѣ силы, приложенныя къ тѣлу ab, которое можемъ считать свободнымъ.

Найдемъ моментъ изгиба m, для какого-нибудь сѣченія c, лежащаго на разстояніи x отъ опоры A. Нужно взять всѣ силы, лежащія *лѣвѣе* c, т. е. моментъ M, силу S, и внѣшнюю нагрузку, приходящуюся между a и c. Называя моментъ этой послѣдней нагрузки, для сѣченія c, черезъ μ_x, получимъ полный моментъ для того же сѣченія:

$$m = M + Sx + \mu_x \quad . \; . \; . \; . \; (55)$$

Сумма срѣзающихъ силъ σ для сѣченія c, получится отъ сложенія силы S съ нагрузкой, лежащей между a и c. Называя эту нагрузку, которую также какъ и силу S, считаемъ *положительной*, если она направлена *вверхъ*, черезъ p_x, получимъ

$$\sigma = S + p_x \quad . \; . \; . \; . \; (56)$$

Это будетъ срѣзающее дѣйствіе, производимое на сѣченіе c той частью балки, которая лежитъ *лѣвѣе* c.

Примѣнимъ формулу (55) къ сѣченію b; тогда величина m должна превратиться въ M', такъ какъ сѣченіе b почти совпадаетъ съ опорой B. Мы получимъ:

$$M' = M + S \, . \, l + \mu_l \quad . \; . \; . \; . \; (57)$$

гдѣ μ_l означаетъ моментъ, для сѣченія B, всей внѣшней нагрузки, лежащей между A и B.

Изъ (57) получаемъ

$$S = \frac{M' - M - \mu_l}{l} \quad . \; . \; . \; . \; (58)$$

Затѣмъ, вставляя величину S въ (55) и (56), получимъ

$$m = M + \frac{M' - M}{l} x - \left(\mu_l \, . \, \frac{x}{l} - \mu_x \right) \quad . \; . \; . \; . \; (59)$$

$$\sigma = \frac{M' + M + \mu_l}{l} + p_x \quad . \; . \; . \; . \; (60)$$

Посмотримъ, какой получился бы моментъ изгиба m, для того же сѣченія c, если бы, вмѣсто неразрѣзной балки, имѣли разрѣзную, т. е. если бы отдѣльный брусокъ $A\ B$ лежалъ своими концами на опорахъ A, B (фиг. 66), и подвергался дѣйствію той же внѣшней нагрузки, что и въ нашемъ случаѣ.

Называя давленіе лѣвой опоры при этомъ черезъ q, получили бы изъ условія равновѣсія моментовъ относительно точки B:

$$q \cdot l + \mu_l = 0;$$

откуда

$$q = -\frac{1}{l} \cdot \mu_l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Затѣмъ моментъ силъ для сѣченія c былъ бы

$$m' = q \cdot x + \mu_x = -\mu_l \cdot \frac{x}{l} + \mu_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Пользуясь уравненіями (61) и (62), преобразуемъ (58), (59) и (60) и придадимъ имъ слѣдующій видъ:

$$S = \frac{M' - M}{l} + q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

$$m = M + \frac{M' - M}{l} \cdot x + m' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

$$\sigma = \frac{M' - M}{l} + q + p_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Величины q и m', представляющія давленіе опоры A и моментъ изгиба для случая однопролетной балки, находятся безъ затрудненія. Уравненія (63)—(65) показываютъ, что, зная моменты надъ опорами, мы можемъ вычислить срѣзающія силы, и моменты изгиба для любого сѣченія балки.

Зная срѣзающія силы S около опоръ, не затруднимся найти давленія опоръ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть желаемъ знать давленіе Q опоры B (фиг. 67). Сдѣлаемъ два сѣченія ∂ и b, лежащія очень близко около B, одно правѣе, а другое лѣвѣе опоры. Будемъ разсматривать равновѣсіе части балки отрѣзанной этими сѣченіями (она заштрихована на фигурѣ). Очевидно давленіе Q должно равняться отрицательной суммѣ срѣзающихъ силъ, приложенныхъ по b и ∂ и дѣйствующихъ на заштрихованную часть балки [1]). Если срѣзающія силы извѣстны, то давленіе Q найдется, слѣдующимъ образомъ. Срѣзающія силы, которыя дѣйствуютъ по сѣченію b, даютъ для значенія Q членъ равный $-S'$ (фиг. 65) т. е.

$$-\frac{M' - M}{l} - q - p$$

гдѣ p есть нагрузка пролета AB.

[1]) Давленіе Q считаемъ положительнымъ если оно направлено вверхъ.

Къ нему нужно прибавить соотвѣтствующій членъ, получающійся отъ срѣзающихъ силъ, которыя дѣйствуютъ по сѣченію ∂. По аналогіи съ формулой 63, напишемъ этотъ членъ въ формѣ:

$$\frac{M'' - M'}{l'} + q';$$

Здѣсь (фиг. 67-bis) l' есть размѣръ пролета, лежащаго правѣе опоры q' означаетъ для этого пролета тоже, что q для лѣваго пролета B; M''—моментъ для опоры C.

Складывая приведенные два члена, получаемъ давленіе Q на опорѣ B

$$Q = -q + q' - p + \frac{M}{l} - M'\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right) + \frac{M''}{l'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65\text{-bis})$$

Здѣсь

$$-q + q' - p$$

представляетъ то давленіе, которое приходилось бы на балки въ опорѣ B отъ нагрузокъ лѣваго и праваго пролетовъ, въ томъ случаѣ, если бы неразрѣзную балку замѣнили рядомъ отдѣльныхъ балокъ, расположенныхъ каждая на двухъ опорахъ. Для полученія Q нужно къ суммѣ

$$-q + q' - p$$

прибавить выраженіе

$$+\frac{M}{l} - M'\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right) + \frac{M''}{l'}.$$

Оно зависитъ отъ трехъ опорныхъ моментовъ, относящихся къ опорѣ B и къ смежнымъ съ нею двумъ опорамъ A и C, лежащимъ лѣвѣе и правѣе B.

Предыдущее показываетъ, что если извѣстны опорные моменты, то безъ труда находятся всѣ прочія величины, необходимыя при изслѣдованіи изгиба, а именно: моменты изгиба и срѣзающія силы для любаго сѣченія балки, и всѣ опорныя давленія.

Такимъ образомъ все изслѣдованіе приводится къ нахожденію моментовъ надъ опорами.

126. Графическое изображеніе. Замѣтимъ, что величина m (уравн. 64) легко можетъ быть построена геометрически. Для этого построимъ (фиг. 68) надъ опорой A ординату $AA' = M$, а надъ опорой B ординату $BB' = M'$, и соединимъ точки A', B' прямою. Затѣмъ на линіи AB построимъ кривую или ломанную AFB, ординаты которой напр. EF изображаютъ моменты изгиба m', производимые данной нагрузкой въ однопролетной балкѣ. Тогда, проведя на разстояніи x отъ A ординату CF, получимъ:

$$EF = m'$$

$$ED = M$$

$$CD = \frac{M' - M}{l} x$$

Слѣдовательно

$$CF = M + \frac{M' - M}{l} x + m' = m,$$

т. е. ордината CF изображаетъ моментъ изгиба неразрѣзной балки. Слѣд., та площадь которая на чертежѣ заштрихована по контуру, даетъ своими ординатами моменты изгиба для всѣхъ сѣченій балки.

127. Выводъ теоремы о трехъ моментахъ. Возьмемъ три какія нибудь рядомъ стоящія опоры A, B, C (фиг. 69) и моменты для нихъ назовемъ

$$M,\ M',\ M''$$

Изъ числа ихъ будемъ считать

$$M'$$

за лишнюю неизвѣстную. Моментъ изгиба для любой точки лѣваго пролета AB назовемъ M_1, а для праваго пролета M_2, тогда потенціальная энергія лѣваго пролета будетъ

$$\int_0^{l_1} \frac{M_1^2}{2EI} \cdot \partial x,$$

а для праваго пролета:

$$\int_0^{l_2} \frac{M_2^2}{2EI} \cdot \partial z$$

Полная же энергія для совокупности разсматриваемыхъ двухъ пролетовъ представится суммою

$$V = \int_0^{l_1} \frac{M_1^2}{2EI} \cdot \partial x + \int_0^{l_2} \frac{M_2^2}{2EI} \cdot \partial z$$

Примѣняя начало наименьщей работы, мы должны написать, что производная этого выраженія по M' равна нулю. Для простоты допустимъ, что по всей длинѣ балки поперечное сѣченіе одинаково; тогда можно сократить постоянное произведеніе

$$EI.$$

Дифференцируя по M' получимъ:

$$\int_0^{l_1} M_1 \cdot \frac{\partial M_1}{\partial M'} \cdot \partial x + \int_0^{l_2} M_2 \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M'} \cdot \partial z = 0 \;.\;.\;. \qquad (66)$$

Чтобы найти моментъ M_1 для лѣваго пролета AB, возьмемъ моментъ силъ лежащихъ слѣва; по формулѣ (64) это будетъ

$$M_1 = M + \frac{M' - M}{l_1} x + m'$$

откуда

$$\frac{\partial M_1}{\partial M'} = \frac{x}{l},$$

Чтобы найти моментъ M_2 для праваго пролета BC возьмемъ моментъ силъ лежащихъ справа; онъ отличается отъ момента силъ лежащихъ слѣва только знакомъ. Слѣд. для полученія его нужно взять общую формулу (64) и сдѣлать въ ней слѣдующія перемѣны: поставимъ въ ней, вмѣсто M и M', моменты для лѣвой и правой опоръ пролета BC, т. е.

$$M' \text{ и } M'';$$

вмѣсто x нужно поставить

$$l_2 - z;$$

соотвѣтствующее этому пролету значеніе m' назовемъ черезъ m'', наконецъ перемѣнимъ знакъ. Получается:

$$M_2 = -\left[M'' + \frac{M' - M''}{l_2} z + m''\right]$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial M'} = -\frac{z}{l_2}$$

Найденныя величины

$$M_1, \frac{\partial M_1}{\partial M'}, \; M_2, \frac{\partial M_2}{\partial M'}$$

нужно подставить въ уравненіе (66). Тогда оно получаетъ видъ:

$$\int_0^{l_1}\left[M\cdot\frac{(l_1-x)}{l_1}\frac{x}{l_1}+M'\left(\frac{x}{l_1}\right)^2+m'\cdot\frac{x}{l_1}\right]dx+$$

$$+\int_0^{l_2}\left[M''\frac{(l_2-z)}{l_2}+M'\left(\frac{z}{l_2}\right)^2+m''\cdot\left(\frac{z}{l_2}\right)\right]dz=0$$

Интегрированія тѣхъ членовъ, которые имѣютъ множителями величины

$$M,\ M',\ M'',$$

независящія отъ x и z, производятся очень легко, такъ какъ имѣемъ дѣло съ цѣлыми функціями. Что же касается до членовъ содержащихъ множителями моменты m и m', то для нихъ интегрированіе можетъ быть произведепо только тогда когда будетъ извѣстна зависимость этихъ моментовъ отъ x и z. Такая зависимость можетъ быть разная въ разныхъ случаяхъ, смотря по данной нагрузкѣ. По этому интегрированіе такихъ членовъ должно быть производимо особо въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Теперь же, при общемъ выводѣ, мы только означимъ это интегрированіе.

Окончательно получимъ:

$$\frac{1}{6}\left[Ml_1+2M'(l_1+l_2)+M''l_2\right]+$$

$$+\int_0^{l_1}m'\cdot\frac{x}{l_1}\,dx+\int_0^{l_2}m''\cdot\frac{z}{l_2}\cdot dz=0\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ (67)$$

Это уравненіе и представляетъ такъ называемую теорему о трехъ моментахъ. Оно даетъ зависимость между моментами для трехъ смежныхъ опоръ

$$M,\ M',\ M''.$$

128. Подобныя же уравненія можно написать и для другихъ опоръ той же балки; нужно всегда брать *три смежныя* опоры. Если число опоръ есть n, то начиная отъ одного конца балки, и беря всякій разъ три рядомъ лежащія опоры, мы можемъ сдѣлать это

$$n-2$$

разъ. Слѣд. получимъ

$$n-2$$

уравненія такого вида какъ (67). Но такъ какъ моменты для двухъ крайнихъ опоръ равны нулю, то въ нашемъ вопросѣ только

$$n-2$$

неизвѣстныхъ момента. Такимъ образомъ получаемъ вполнѣ опредѣленное рѣшеніе; число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, и всѣ уравненія первой степени. Поэтому найдемъ всѣ моменты для опоръ. Зная ихъ, можемъ по формуламъ 63—65 найти все что требуется для изслѣдованія изгиба балки.

129. Наглядное описаніе теоремы о трехъ моментахъ. Можно дать простое толкованіе тому выраженію, которое находится въ лѣвой части уравненія (67). Здѣсь m' и m'' представляютъ, для лѣваго и праваго пролетовъ, тѣ моменты изгиба, которые получились бы отъ данной нагрузки если бы, вмѣсто неразрѣзной балки, перекрыли каждый пролетъ особой отдѣльной балкой. Изобразимъ величины m и m' графически, откладывая ихъ по ординатамъ вертикально подъ соотвѣтствующими сѣченіями балки (фиг. 70). Получаются площади моментовъ I и II, заштрихованныя на нашемъ чертежѣ. Сдѣлаемъ нагрузку такой формы какъ площадь I, и повѣсимъ ее концами на опоры A и B. Давленіе отъ этой нагрузки на опору B найдется изъ условія, что моментъ этого давленія, относительно опоры A, равенъ суммѣ моментовъ, для той же опоры, отъ всѣхъ элементарныхъ частей

$$m' \,.\, \partial x,$$

изъ которыхъ состоитъ наша грузовая площадь. Слѣдовательно это давленіе будетъ

$$\frac{1}{l_1} \cdot \int_0^{l_1} m' \cdot \partial x \cdot x$$

Примѣняя тоже представленіе къ правому пролету получаемъ, что если принять площадь II за нагрузку, и повѣсить ее концами на опоры B и C, то давленіе на B будетъ

$$\frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} m'' \cdot \partial z \cdot z$$

Эти давленія и представляютъ интегралы, входящіе въ урав. (67).

Такое описаніе механическаго значенія нашихъ интеграловъ очень помогаетъ запоминанію ихъ.

Оно же помогаетъ и нахожденію ихъ величинъ, въ особенности если моментныя площади имѣютъ простую форму, позволяющую легко найти положенія ихъ центровъ тяжести G_1, G_2. Пусть разстояніе центра G_1 отъ вертикали черезъ A будетъ k_1 а величина самой площади

$$\Omega_1.$$

Тогда давленіе на опору B отъ лѣвой моментной площади изобразится слѣдующимъ простымъ выраженіемъ:

$$\frac{\Omega_1 \,.\, k_1}{l_1}$$

Для правой площади получимъ подобную же формулу

$$\frac{\Omega_2 \,.\, k_2}{l_2}$$

Подобное же толкованіе можно дать и другому члену, входящему въ урав. (67) т. е. выраженію

$$\frac{1}{6}\left(Ml_1 + 2M'(l_1 + l_2) + M''l_2\right).$$

Для объясненія этого обратимся къ фиг. 71, гдѣ опорные мементы

$$M,\ M',\ M''$$

отложены подъ соотвѣтствующими опорами, и построена соотвѣтствующая моментная площадь

$$A'\ A''\ B''\ C''\ C'.$$

Разсмотримъ лѣвую часть этой площади

$$A'\ A''\ B''\ B',$$

лежащую подъ лѣвымъ пролетомъ. Вообразимъ себѣ, что эта площадь представляетъ грузъ, который повѣсимъ концами на опоры A и B. Давленіе, которое произведетъ этотъ грузъ на опору B легко опредѣлить. Для этого раздѣлимъ грузовую площадь на два треугольника

$$A'\ A''\ B'' \text{ и } A'\ B''\ B'$$

Площадь перваго изъ нихъ будетъ

$$\frac{1}{2}\,Ml_1.$$

и одна треть этой величины, т. е.

$$\frac{1}{6} M l_1$$

передастся на опору B.

Площадь другаго треугольника будетъ

$$\frac{1}{2} M' l_1,$$

и двѣ трети ея величины т. е.

$$\frac{1}{3} M' l_1$$

передадутся на опору B. Складывая эти два давленія получимъ на опорѣ B отъ грузовой площади

$$A' \, A'' \, B'' \, B'$$

давленіе

$$\frac{1}{6} l_1 (M + 2M')$$

Также поступимъ и для праваго пролета. Предположимъ, что моментная площадь

$$B' \, B'' \, C'' \, C'$$

есть грузъ подвѣшенный своими концами на опоры B и C. Тогда на опору B придется давленіе

$$\frac{1}{6} l_2 (M'' + 2M').$$

Складывая два давленія, приходящіяся на опору B отъ лѣвой и правой моментныхъ площадей, получимъ полное давленіе

$$\frac{1}{6} \left(M l_1 + 2M' (l_1 + l_2) + M'' . l_2 \right)$$

Это выраженіе тождественно съ первымъ членомъ уравненія (67).

Соединяя этотъ результатъ, съ тѣмъ, который мы вывели объясняя значеніе интеграловъ, входящихъ въ урав. (67), получаемъ слѣдующее наглядное описаніе теоремы о трехъ моментахъ, очень облегчающее запоминаніе ея.

Нужно взять *полныя* площади моментовъ для разсматриваемыхъ двухъ пролетовъ (см. фиг. 72 гдѣ эти площади заштрихованы по контуру). Каждую площадь нужно считать грузомъ, который своими концами повѣшенъ на двѣ соотвѣтствующія опоры. Затѣмъ нужно выразить, что полное давленіе, приходящееся отъ этихъ двухъ грузовъ на среднюю опору, равно нулю.

Написавъ это условіе получаемъ уравненіе (67).

Конечно для выполненія его нѣкоторые изъ моментовъ должны быть отрицательными. Такъ напр. пусть моменты

$$m', \; m'',$$

положительные; это получается при обыкновенной нагрузкѣ пролетовъ тяжестями, т. е. силами направленными внизъ. Тогда опорные моменты

$$M, \; M', \; M''$$

получаются отрицательные.

Историческое замѣчаніе. Клапейрону принадлежитъ счастливая идея упростить рѣшеніе вопроса о неразрѣзныхъ балкахъ помощію введенія опорныхъ моментовъ, взамѣнъ опорныхъ давленій. Первоначально онъ вводилъ въ свои уравненія, кромѣ опорныхъ моментовъ, еще и другія вспомогательныя неизвѣстныя, и только впослѣдствіи освободился отъ нихъ и получилъ теорему о трехъ моментахъ. Нѣсколько раньше таже теорема была получена Берто, который нашелъ ее, исходя изъ первоначальнаго рѣшенія Клапейрона. Оба эти изслѣдователя разсматривали только случай равномѣрно распредѣленной нагрузки. Обобщеніе теоремы о трехъ моментахъ и распространіе ея на случай произвольной нагрузки сдѣлалъ Брессъ [1]).

130. Пятый примѣръ. Распоръ двухшарнерной арки, со сплошнымъ сѣченіемъ (фиг. 72). Вопросъ этотъ разсмотримъ, предполагая, что арка симметричная и имѣетъ постоянное поперечное сѣченіе по всей своей длинѣ, притомъ сѣченіе арки симметрично относительно плоскости дѣйствія силъ.

Разберемъ дѣйствіе одиночнаго груза P, приложеннаго въ любомъ мѣстѣ арки, и выведемъ величину вызываемаго этимъ грузомъ горизонтальнаго распора H.

Выводъ будемъ дѣлать въ предположеніи, что радіусъ кривизны для оси арки значительно больше чѣмъ высота ея поперечнаго сѣченія. Тогда можно съ достаточной степенью точности разсматривать напряженіе какъ состоящее изъ совокупности сжатія и изгиба. Для упрощенія выводовъ пренебрежемъ сжатіемъ и будемъ разсматривать только изгибъ; моментъ изгиба для сѣченія, имѣющаго координаты x, y, въ той части арки, которая лежитъ между

[1]) См. Bresse. Cours de Mécanique appliquée. Troisieme Partie. Предисловіе, стр. IX.

лѣвой опорой и точкой приложенія нагрузки P, назовемъ черезъ M_1. Для остальной части арки моментъ изгиба называемъ M_2. Вертикальныя давленія лѣвой и правой опоръ назовемъ A и B. Наконецъ введемъ еще упрощеніе, которое обыкновенно дѣлаютъ, разбирая арочныя фермы: пренебрежёмъ разностью между длиною элемента криволинейной оси арки, и проекціей этого элемента на ось x. Т. е. вмѣсто длины элемента дуги ∂s вездѣ будемъ вводить элементъ абсциссы ∂x.

Такая приблизительная теорія даетъ вполнѣ удовлетворительные результаты *для всѣхъ арокъ встрѣчающихся въ мостовыхъ и гражданскихъ сооруженіяхъ.*

Моменты изгиба будутъ:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= Ax - Hy \quad . \; . \; . \; . \; . \\ M_2 &= Ax - Hy - P(x-a) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (69)$$

Потенціальная энергія будетъ:

$$V = \int \frac{M^2 \, . \, \partial x}{2EI} = \frac{1}{2EI} \int_A^C M_1^2 \, . \, \partial x + \frac{1}{2EI} \int_C^B M_2^2 \, . \, \partial x$$

Первый изъ этихъ интеграловъ относится къ части арки отъ A до C, а второй—къ остальной части арки.

Примѣняя начало наименьшей работы, получаемъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{EI} \cdot \int_A^C M_1 \cdot \frac{\partial M_1}{\partial H} \cdot \partial x + \frac{1}{EI} \int_C^B M_2 \cdot \frac{\partial M_2}{\partial H} \cdot \partial x = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (70)$$

Но изъ (69) получаемъ:

$$\frac{\partial M_1}{\partial H} = \frac{\partial M_2}{\partial H} = -y$$

Слѣд. наше уравненіе (70) получаетъ видъ

$$\int_A^C (Ax - Hy) \, y \partial x + \int_C^B [Ax - Hy - P\,(x-a)] \, y \partial x = 0$$

Затѣмъ раздѣляя интегралы, и вынося постоянные множители изъ подъ знака интегрированія, получаемъ:

$$A\int_A^C yx\partial x - H.\int_A^C y^2.\partial x + A.\int_C^B yx.\partial x - H.\int_C^B y^2.\partial x$$

$$-P.\int_C^B (x-a).\ y.\partial x = 0$$

Здѣсь можно соединить въ одно интегралы первый и третій, а также второй и четвертый, и получается упрощеніе:

$$A.\int_A^B yx.\partial x - H\int_A^B y^2.\partial x - P.\int_C^B (x-a).y\partial x = 0$$

Давленіе A замѣнится выраженіемъ

$$P\frac{b}{L},$$

и мы получаемъ распоръ

$$H = P\cdot\frac{\frac{b}{L}\cdot\int_A^B yx.\partial x - \int_C^B y(x-a).\partial x}{\int_A^B y^2.\partial x}\quad . \ . \ . \ . \ (71)$$

131. Чтобы произвести интегрированія, означенныя въ этой формулѣ, нужно знать зависимость y отъ x; т. е. нужно знать форму кривой, по которой очерчена ось арки.

Легче всего производится интегрированіе, когда эта кривая есть парабола, такъ какъ тогда подъ интегралами получаются цѣлыя функціи. Примѣненіе этой кривой для очертанія арокъ вполнѣ раціонально; при такомъ очертаніи равномѣрно распредѣленный грузъ не производитъ въ аркѣ изгиба, и въ ней получается только сжатіе.

Формулы, выведенныя для параболической арки, можно съ нѣкоторымъ приближеніемъ примѣнять и для другихъ очертаній оси, напр. для дуги круга, если только арка отлогая, т. е. отношеніе ея стрѣлы къ пролету

$$\frac{h}{L}$$

не велико.

Уравненіе параболы, проходящей черезъ три точки (фиг. 73).

$$A,\ D,\ B,$$

будетъ:

$$y = x(L - x) \cdot \frac{4h}{L^2}$$

Это выраженіе y вставимъ въ предыдущіе интегралы. Придется интегрировать цѣлыя функціи отъ x, что дѣлается безъ труда и мы получимъ окончательно:

$$H = \frac{5}{8} P \cdot \frac{a \,.\, (L - a)}{h \,.\, L^3} (L^2 + La - a^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \ (72).$$

132. Формула Энгессера. Выраженіе стоящее въ скобкахъ въ форм. (72).

$$L^2 + La - a^2$$

измѣняется при передвиженіи груза P, но это измѣненіе не особенно велико. При измѣненіи a въ предѣлахъ между нулемъ и L, разность

$$La - a^2$$

мѣняется въ предѣлахъ отъ своей самой малой величины (т. е. нуля) до самой большой величины

$$\frac{L^2}{4}$$

Замѣнимъ эту перемѣнную разность постоянной величиной, а именно среднимъ ея значеніемъ

$$\frac{L^2}{8}.$$

Тогда величина, стоящая въ скобкахъ, въ уравн. (72) будетъ

$$\frac{9}{8} L^2,$$

и мы получаемъ приблизительную формулу для вычисленія распора арки

$$H = \frac{3}{4} P \cdot \frac{ab}{hL} \quad . \quad . \quad . \quad . \; (73)$$

Эта послѣдняя формула принадлежитъ Энгессеру. Для отлогихъ арокъ она достаточно близка къ истинѣ, и ею можно пользоваться при расчетахъ.

Задача. Примѣнить эту формулу къ случаю нагрузки равномѣрно распредѣленной по всей длинѣ моста (фиг. 73-bis).

133. Задачи на начало наименьшей работы. *A)* **Подпружная балка** (фиг. 74). Здѣсь можно считать лишней неизвѣстной давленіе бабки Q, или вмѣсто того—горизонтальную слагающую натяженія тягъ T.

B) **Колѣнчатое коромысло** (фиг. 74-bis), укрѣпленное тягой AC, такъ что получается треугольная система. Натяженіе тяги X нужно считать лишней неизвѣстной.

C) **Звено** (фиг. 75) растягиваемое силами P. Здѣсь внутреннія силы, соединяющія двѣ половины звена, приводятся къ двумъ силамъ $\frac{P}{2}$ и двумъ парамъ M. Величину момента пары M нужно принять за лишнюю неизвѣстную.

134. Въ заключеніе укажемъ на два важныхъ примѣненія начала наименьшей работы: a) къ расчету упругаго свода, и b) къ опредѣленію напряженій корпуса корабля, вызываемыхъ давленіемъ на него воды [1]).

---

[1]) По этому послѣднему вопросу см. работу Bruhn въ Engineering 1901 г.

ГЛАВА VIII.

Вліяніе перемѣщеній опоръ.

135. Когда имѣются лишнія опорныя реакціи, то перемѣщенія опоръ вызываютъ измѣненіе этихъ реакцій, а также сопровождаются измѣненіемъ внутреннихъ напряженій. Мы будемъ считать нормальнымъ такое положеніе опоръ, которое вполнѣ согласуется съ тѣмъ размѣщеніемъ опорныхъ точекъ фермы, какое придано при сборкѣ ея. Отступленія отъ нормальнаго расположенія опоръ могутъ быть: a) случайныя, происшедшія оттого, что опоры недостаточно устойчивы и поддаются подъ дѣйствіемъ давленія фермы на нихъ; b) намѣренныя, которыя напередъ назначаются строителемъ съ цѣлью измѣнить распредѣленіе силъ въ фермѣ. Такое измѣненіе иногда можетъ быть полезно; этимъ можно достигнуть болѣе равномѣрнаго распредѣленія напряженій между частями фермы.

Вліяніе перемѣщенія опоръ легко можетъ быть опредѣлено помощію теоремы Кастиліано, въ связи съ началомъ наименьшей работы. Предположимъ, что у насъ имѣются лишнія реакціи опоръ

$$Y,\ Y',\ Y'' \ldots,$$

$$Z,\ Z',\ Z'' \ldots$$

и кромѣ того другія лишнія неизвѣстныя

$$X,\ X',\ X'' \ldots$$

Для нѣкоторыхъ изъ реакцій опоръ, а именно для всѣхъ Y, мы напередъ назначаемъ опредѣленныя перемѣщенія

$$y,\ y',\ y'' \ldots$$

Пусть остальныя опоры, реакціи которыхъ названы буквами Z, неподвижны.

На основаніи теоремы Кастиліано мы получаемъ перемѣщенія опоръ какъ производныя отъ потенціальной функціи V по соотвѣтствующимъ силамъ. Т. е. получимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial Y}=y;\ \frac{\partial V}{\partial Y'}=y',\ .\ .\ .\ .$$

$$\frac{\partial V}{\partial Z}=0;\ \frac{\partial V}{\partial Z'}=0\ .\ .\ .\ .$$

А на основаніи начала наименьшей работы получимъ, что производныя отъ V по лишнимъ неизвѣстнымъ X будутъ нули:

$$\frac{\partial V}{\partial X}=0;\ \frac{\partial V}{\partial X'}=0\ .\ .\ .\ .$$

Совокупность всѣхъ этихъ уравненій представляетъ систему уравненій первой степени, при чемъ число уравненій равно числу неизвѣстныхъ

$$X,\ X',\ X''\ .\ .\ .\ .$$

$$Y,\ Y',\ Y'',\ .\ .\ .\ .$$

$$Z,\ Z',\ Z'',\ .\ .\ .\ .$$

Такимъ образомъ всѣ неизвѣстныя могутъ быть опредѣлены.

Чтобы яснѣе видѣть и оцѣнить значеніе перемѣщеній опоръ, лучше отдѣлить этотъ вопросъ отъ вопроса о дѣйствіи внѣшнихъ нагрузокъ. Нужно предположить, что всѣ нагрузки отброшены, и изъ числа внѣшнихъ силъ остались только реакціи опоръ и лишнія неизвѣстныя X, X'.... Для этого случая слѣдуетъ составить выраженіе энергіи V.

Тогда предыдущія уравненія дадутъ величины реакцій и лишнихъ неизвѣстныхъ, вызываемыя исключительно перемѣщеніемъ опоръ.

При составленіи выраженія для V, нужно предварительно выразить напряженія всѣхъ необходимыхъ частей фермы въ функціи отъ неизвѣстныхъ

$$X,\ X'\ .\ .\ .\ .\ Y,\ Y'\ .\ .\ .\ .\ Z,\ Z'\ .\ .\ .\ .$$

136. Примѣръ. Раскосная двухшарнерная арка (фиг. 76), въ частяхъ который вовсе нѣтъ изгиба. Опредѣлить вліяніе горизонтальнаго перемѣщенія устоевъ.

Здѣсь имѣемъ одну лишнюю неизвѣстную — горизонтальный распоръ X. Положимъ, что устои, на которые арка опирается своими концами, сдвинуты такъ, что разстояніе пятокъ меньше нормальнаго на извѣстную величину Δ.

Сначала найдемъ напряженія брусковъ арки, вызываемыя распоромъ X, и ему пропорціональныя. Для этого нужно задать для X величину равную единицѣ, (фиг. 76. II), и построить діаграмму напряженій. Если при этомъ напряженіе какого либо бруска есть

$$T_1,$$

то при дѣйствіи силы X, оно будетъ

$$X \cdot T_1.$$

Потенціальная энергія одного бруска будетъ

$$\frac{(XT_1)^2 \cdot l}{2E\omega}$$

Полная энергія всей системы получится суммируя энергіи отдѣльныхъ брусковъ и будетъ

$$V = \sum \frac{(XT_1)^2 \cdot l}{2E\omega}$$

По изложенному правилу мы должны положить, что

$$\frac{\partial V}{\partial X}$$

равняется данному перемѣщенію опоръ Δ. И такъ получимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \sum \frac{XT_1}{E\omega} \cdot l \cdot T_1 = \Delta$$

или

$$X = \frac{\Delta}{\sum \frac{l}{E\omega} \cdot T_1^2}$$

Если бы опоры были не *сближены*, по сравненію съ ихъ нормальнымъ положеніемъ, а *раздвинуты*, то Δ слѣдовало бы считать отрицательнымъ. Это измѣняетъ направленіе распора X, который будетъ тогда идти въ сторону противуположную показанной на фиг. 76.

137. Еще примѣръ. Перемѣщеніе опоръ неразрѣзной балки. Разсмотримъ сначала перемѣщеніе одной изъ опоръ, напр. *повышеніе* ея на величину δ надъ уровнемъ смежныхъ съ нею опоръ. Также какъ въ предыдущей главѣ ($n^0 n^0$ 127—129) будемъ разсматривать часть балки, лежащую на трехъ смежныхъ опорахъ A, B, C (фиг. 76-bis) и отдѣлимъ эту часть отъ остальной балки. Опорные моменты для A, B, C означимъ по прежнему буквами

$$M,\ M',\ M'',$$

но теперь мы предполагаемъ, что нагрузки отсутствуютъ, и единственная причина, вызывающая изгибъ и появленіе опорныхъ моментовъ, есть перемѣщеніе опоры B вверхъ на величину δ.

Вертикальному перемѣщенію δ опоры B соотвѣтствуетъ вертикальное давленіе Q этой опоры направленное въ ту же сторону какъ и перемѣщеніе; или другими словами δ, и Q представляютъ перемѣщеніе и силу, относящіяся къ одному и тому же типу. На основаніи теоремы Кастиліано, перемѣщеніе δ будетъ производная отъ потенціальной энергіи по соотвѣтствующей силѣ Q.

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Найдемъ эту производную.

Мы имѣли уже въ n^0 127 общее выраженіе для потенціальной энергіи V неразрѣзной балки. Теперь, примѣняя его къ нашему частному случаю, должны положить нулями величины

$$m \text{ и } m',$$

которыя представляютъ дѣйствіе нагрузокъ, расположенныхъ между опорами. Затѣмъ нужно взять производную отъ V по давленію Q. Но давленіе Q опредѣляется общей формулой (65-bis), а въ нашемъ частномъ случаѣ нужно положить нулями члены

$$q,\ q',\ p,$$

которые представляютъ дѣйствіе нагрузокъ между опорами. Тогда получимъ

$$Q = +\frac{M}{l} - M'\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right) + \frac{M''}{l'} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Въ n^0 127 у насъ за независимую перемѣнную былъ принятъ моментъ

$$M',$$

и мы брали производную отъ энергіи по M'. Теперь должны считать независимой перемѣнной Q, и дифференцировать энергію по Q. Но Q есть функція M', слѣд. имѣемъ

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{\partial V}{\partial M'} \cdot \frac{\partial M'}{\partial Q}.$$

А пользуясь зависимостью (α) найдемъ:

$$\frac{\partial M'}{\partial Q} = -\frac{ll'}{l+l'}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = -\frac{ll'}{l+l'} \cdot \frac{\partial V}{\partial M'}$$

Мы уже имѣли въ n^0 127 производную отъ V по M', (см. уравн. 67). Слѣд. теперь можемъ воспользоваться прежнимъ выраженіемъ; нужно только ввести въ него множитель

$$-\frac{ll'}{l+l'},$$

и кромѣ того вспомнить, что въ выраженіи для V входило въ знаменатель произведеніе

$$EI.$$

Мы его отбросили въ n^0 127, такъ какъ тамъ производная отъ V приравнивалась нулю. Здѣсь же эта производная не равна нулю, а должна представить величину повышенія опоры δ (урав. A); поэтому здѣсь нельзя сдѣлать такое сокращеніе.

Сообразивъ все это, мы составимъ требуемое уравненіе (A), воспользовавшись урав. 67, и найдемъ:

$$-\frac{1}{6EI} \cdot \left[Ml + 2M'(l+l') + M''l'\right] \frac{ll'}{l+l'} = \delta$$

Такую форму получаетъ уравненіе трехъ моментовъ, для нашего вопроса о вліяніи перемѣщеній опоръ.

Чтобы получить полное рѣшеніе вопроса, примѣнимое ко всякому случаю перемѣщенія опоръ, предположимъ, что всѣ три смежныя опоры A, B, C перемѣстились въ положенія A', B', C' (фиг. 76-bis). Назовемъ повышенія этихъ опоръ черезъ

$$y_1,\ y_2,\ y_3.$$

Тогда величина δ, т. е. вертикальное повышеніе средней опоры B'

надъ линіей крайнихъ A', C', будетъ:

$$\delta = y_2 - \frac{1}{l + l'}(y_3 l + y_1 l') =$$

$$= \frac{1}{l + l'}(-y_1 l' + y_2 (l + l') - y_3 l)$$

Эта величина должна быть вставлена въ предыдущее уравненіе вмѣсто δ.

Подобныя же уравненія можно составить для каждыхъ трехъ смежныхъ опоръ по всей длинѣ балки. Не трудно убѣдиться, что и здѣсь, также какъ въ n^0 127—129, мы получимъ столько же уравненій сколько имѣется неизвѣстныхъ опорныхъ моментовъ. Такимъ образомъ получается вполнѣ опредѣленное рѣшеніе. Мы найдемъ опорные моменты, а помощію ихъ опредѣлимъ всѣ обстоятельства изгиба.

Это дополненіе теоремы о трехъ моментахъ—введеніе перемѣщеній опоръ—сдѣлалъ Брессъ.

138. Другіе способы изслѣдованія. Вліяніе перемѣщенія опоръ можетъ быть также изслѣдовано примѣняя, вмѣсто теоремы Кастиліано, другіе изложенные нами пріемы, напр. способъ Мора.

Покажемъ это на уже разобранномъ нами примѣрѣ двухшарнерной арки. Примѣняя способъ Мора, разсмотримъ два случая дѣйствія силъ (фиг. 77): *первый* (I), когда распоръ равенъ единицѣ; и *второй* (II), когда устои сблизились на величину

$$\Delta,$$

отчего распоръ получаетъ искомую величину X. Напряженія брусковъ для перваго случая назовемъ черезъ

$$T_1,$$

тогда для второго случая эти напряженія получаютъ величины.

$$X \,.\, T_1$$

Напишемъ работу всѣхъ силъ, появляющихся въ первомъ случаѣ, для перемѣщеній второго случая. Здѣсь имѣемъ слѣдующую совокупность:

Первый случай.	**Второй случай.**
Силы.	*Перемѣщенія.*
Распоръ $X = 1$.	Δ.
Напряженія$= T_1$.	Удлиненія будутъ $\dfrac{X \,.\, T_1 \,.\, l}{E\omega}$

Слѣд. наше уравненіе работъ будетъ:

$$1^k \,.\, \Delta - \Sigma T_1 \frac{X \,.\, T_1}{E\omega} \cdot l = 0$$

Откуда распоръ получаетъ прежнюю величину

$$X = \frac{\Delta}{\Sigma T_1^{\,2} \dfrac{l}{E\omega}} \,.$$

ГЛАВА IX.

Вліяніе температуры.

139. Только системы статически опредѣлимыя, въ которыхъ нѣтъ лишнихъ частей и лишнихъ реакцій опоръ, неподвержены вліянію температуры, т. е. ихъ реакціи и внутреннія силы не мѣняются при нагрѣваніи или охлажденіи. Такая независимость сохраняется какъ при одинаковомъ нагрѣваніи всѣхъ частей фермы, такъ и въ случаѣ, когда части нагрѣты неодинаково. Въ такихъ фермахъ каждая часть можетъ свободно принять любую длину, отвѣчающую произвольной температурѣ. Этому не мѣшаетъ связь этой части съ другими частями и опорами. Дѣйствительно, мы видѣли, что характеристика статически опредѣлимыхъ системъ заключается въ возможности заданія произвольной длины для каждаго бруска системы. А отсутствіе лишнихъ реакцій позволяетъ системѣ свободно, безъ сопротивленія, занять произвольное положеніе, отвѣчающее измѣненнымъ длинамъ частей.

Во всѣхъ другихъ системахъ повышеніе или пониженіе температуры можетъ вызвать перемѣну реакцій опоръ и измѣненіе напряженій частей.

140. Такъ для прямой фермы, лежащей на трехъ опорахъ, неравномѣрное нагрѣваніе вызываетъ перемѣну давленій опоръ. Иногда дѣйствіемъ солнечныхъ лучей верхній поясъ такой балки нагрѣвается сильнѣе нижняго [1]). Вслѣдствіе этого балка стремится искривиться выпуклостью кверху и въ срединѣ ея является стремленіе подняться и отдѣлиться отъ средней опоры. Этого отдѣленія обыкновенно не происходитъ, такъ какъ собственный вѣсъ балки

---

[1]) Это легко можетъ случится при ѣздѣ по низу, когда полотно моста предохраняетъ нижній поясъ отъ дѣйствія солнечныхъ лучей.

удерживаетъ ее на опорѣ[1]); но означенное стремленіе имѣетъ своимъ результатомъ уменьшеніе давленія на средней опорѣ и увеличеніе давленій крайнихъ опоръ.

Но, и при одинаковомъ нагрѣваніи всѣхъ частей, реакціи опоръ многопролетной балки могутъ измѣниться вслѣдствіе нагрѣванія. Это будетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда опоры расположены на различныхъ уровняхъ, какъ на фиг. 78. Три опоры этой фермы препятствующія вертикальнымъ перемѣщеніямъ ея точекъ A, B, C, не позволяютъ фермѣ принять фигуру, естественную для новой, болѣе высокой температуры. (Эта естественная форма геометрически подобна прежней, и отношеніе сходственныхъ размѣровъ ихъ равно

$$\frac{1+\alpha t}{1}$$

гдѣ t—нагрѣваніе въ градусахъ

α—коефф. расширенія отъ тепла).

По этому нагрѣваніе измѣнитъ реакціи опоръ, а послѣдствіемъ этого будетъ измѣненіе напряженій.

141. Въ особенности сильно вліяетъ температура на измѣненіе реакцій и напряженій въ *арочныхъ* фермахъ, (за исключеніемъ трехшарнерной арки).

Двухшарнерная арка, вслѣдствіе неподвижности пятокъ, не можетъ принять свою естественную форму при измѣненіи температуры. Вслѣдствіе этого при нагрѣваніи получается увеличеніе горизонтальнаго распора арки, а это вызываетъ увеличеніе напряженій во всѣхъ частяхъ арки. Такія увеличенія особенно значительны въ плоскихъ аркахъ, стрѣлка которыхъ составляетъ небольшую долю разстояній между пятками. Арки съ большимъ подъемомъ въ серединѣ, какъ напр. арка моста черезъ р. Дуро у Опорто, или арка віадука у Гарабита, получаютъ сравнительно меньшія напряженія отъ измѣненія температуры.

142. Для примѣра беремъ у Вейрауха[2]) числа, относящіяся къ аркѣ Кобленцкаго моста. Разстояніе пятокъ равно 98 метровъ; отношеніе стрѣлки къ этому разстоянію равно

$$\frac{1}{11}.$$

---

[1]) Иногда впрочемъ для уничтоженія такого стремленія можетъ понадобиться прикрѣпленіе фермы болтами къ устоямъ.

[2]) Weyrauch. Die Elastischen Bogentraeger s. 87.

По вычисленіямъ Вейрауха, нагрѣваніе на 30° C выше той температуры, при которой была произведена сборка, вызываетъ въ этой аркѣ слѣдующія наибольшія дополнительныя напряженія:

въ верхнемъ поясѣ: +192,9 кил. на кв. с. (растяженіе)
въ нижнемъ поясѣ: —270 » » » » (сжатіе).

Еще болѣе значительныя напряженія вызываются нагрѣваніемъ въ аркахъ, пяты которыхъ закрѣплены, такъ что здѣсь уничтожена свобода поворота сѣченій. Вейраухъ вычислилъ для той же арки Кобленцкаго моста, что если бы пятки ея были закрѣплены, то нагрѣваніе на 30° C вызвало бы слѣдующія наибольшія дополнительныя напряженія [1]:

1) у пятъ:

въ верхнемъ поясѣ: —900,6 кил. на квад. сант.
въ нижнемъ поясѣ: +557,9 » » » »

2) у вершины:

въ верхнемъ поясѣ: +190 кил. на квад. сант.
въ нижнемъ поясѣ: —569,7 » » » »

Эти напряженія такъ велики, что даже превосходятъ безопасные предѣлы.

143. Гипотезы, на которыхъ мы будемъ основывать наши вычисленія. Мы будемъ считать, что имѣемъ дѣло съ изотропнымъ матеріаломъ, въ которомъ равномѣрное нагрѣваніе не вызываетъ перекашиванія. Нагрѣтый прямоугольный брусокъ такого матеріала стремится расшириться одинаково по всѣмъ тремъ измѣреніямъ, и если этому нѣтъ препятствій, то всѣ размѣры его увеличиваются пропорціонально отношенію

$$1 + \alpha t \text{ къ единицѣ.}$$

Если же есть препятствіе такому расширенію, по направленію одного изъ трехъ размѣровъ бруска, то по этому направленію появится сжимающая сила равная

$$E\alpha t$$

килогр. на единицу сѣченія бруска. При охлажденіи получаются обратныя явленія. Величину коеффиціента упругости E мы будемъ считать постоянной, т. е. независящей ни отъ температуры, ни отъ величины силъ, растягивающихъ или сжимающихъ брусокъ.

[1]) Weyrauch. s. 121.

144. Величины измѣненій температуры. За исходную или начальную температуру, отъ которой считаются измѣненія ея, вызывающія напряженія, нужно принять ту температуру, при которой происходила сборка моста. Затѣмъ наибольшее возможное пониженіе температуры указывается самой низкой температурой, которая можетъ быть зимой; т. е. самой низкой температурой воздуха, указываемой термометромъ, который долженъ быть расположенъ *въ тѣни*. Наибольшее повышеніе температуры произойдетъ конечно въ жаркіе лѣтніе дни. Но величина такого повышенія не указывается обыкновенными метеорологическими наблюденіями, которыя даютъ температуру воздуха, т. е. основаны на показаніяхъ термометра, расположеннаго въ тѣни. Мостъ освѣщаемый лучами солнца можетъ нагрѣться до температуры высшей чѣмъ температура окружающаго воздуха.

Для сѣвера Россіи можно считать, что самая низкая температура моста есть

$$-50^0\ C$$

а самая высокая

$$+50^0\ C$$

145. Вліяніе температуры можно разобрать различнымъ образомъ. Одинъ изъ способовъ состоитъ въ томъ, что мы устраняемъ мысленно лишнія реакціи, и затѣмъ находимъ естественное измѣненіе фигуры системы, происходящее отъ свободнаго удлиненія нагрѣтыхъ частей ея. Это разсмотрѣніе позволяетъ опредѣлить перемѣщенія тѣхъ точекъ фермы, которыя должны были бы опираться на опоры, но вслѣдствіе указаннаго свободнаго удлиненія оставили опоры. Затѣмъ нужно эти точки вернуть въ ихъ истинныя положенія на опорахъ, для чего потребуются извѣстныя силы. Эти силы и будутъ дополнительныя реакціи, вызываемыя нагрѣваніемъ.

Здѣсь нужно сначала постараться рѣшить геометрическую задачу—найти измѣненіе фигуры, при удлиненіи частей фермы. Потомъ выступаетъ механическая задача: найти силы, производящія извѣстныя перемѣщенія, а именно возвращающія опорныя точки на опоры.

Эта вторая задача легко рѣшается помощію извѣстныхъ намъ пріемовъ. Общимъ рѣшеніемъ здѣсь можетъ послужить теорема Кастиліано. Она даетъ, что производная

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \text{перемѣщенію } \varphi.$$

Слѣд. если φ извѣстно, то это уравненіе можетъ послужить для нахожденія силы

$$\Phi.$$

Иногда искомая сила находится еще проще. Приведемъ два простыхъ примѣра.

146. Первый примѣръ. Балка лежитъ на трехъ опорахъ A, B, C одинаковой высоты, расположенныхъ симметрично (фиг. 79). Температура верхняго пояса поднялась на t^0 выше температуры нижняго пояса. Найти измѣненіе реакціи средней опоры.

Такъ какъ равномѣрное нагрѣваніе или охлажденіе всей такой балки не мѣняетъ реакцій, то къ назначенному измѣненію температуры прибавимъ еще одинаковое охлажденіе обоихъ поясовъ на $\frac{t}{2}$ градусовъ. Въ результатѣ получится, что верхній поясъ нагрѣтъ на $\frac{t}{2}$, а нижній на столько же охлажденъ.

Поэтому верхній поясъ получитъ относительное удлиненіе

$$\alpha\frac{t}{2},$$

а нижній такое же сжатіе. Результатомъ будетъ изгибаніе балки по дугѣ круга выпуклостью вверхъ, какъ это показано внизу фиг. 79. Если назовемъ радіусъ искривленія черезъ φ, а высоту балки черезъ h, то получимъ приблизительно: относительное удлиненіе пояса

$$\frac{\left(\frac{h}{2}\right)}{\varphi}$$

т. е.

$$\alpha\cdot\frac{t}{2}=\frac{h}{2\varphi}$$

или

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{\alpha t}{h}$$

Изгибъ произойдетъ по дугѣ круга, и стрѣлка прогиба f будетъ во всякомъ случаѣ составлять очень небольшую долю отъ радіуса φ. Слѣд. вмѣсто извѣстнаго соотношенія между стрѣлкой и радіусомъ круга

$$f\cdot(2\varphi-f)=\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

можно взять

$$f \cdot 2\varphi = \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Поэтому получимъ

$$f = \frac{l^2}{8\varphi} = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{\alpha t}{h}.$$

Измѣненіе реакціи средней опоры должно получить такую величину чтобы оно было въ состояніи уничтожить эту стрѣлу прогиба, и вернуть середину балки на опору, т. е. должно быть

$$\frac{X \cdot l^3}{48 \cdot EI} = f;$$

откуда найдемъ X.

$$X = 6EI\alpha t \cdot \frac{l}{h}$$

Здѣсь I моментъ инерціи поперечнаго сѣченія балки.

147. Другой примѣръ. Ферма (фиг. 80) лежитъ на трехъ опорахъ, расположенныхъ на различныхъ уровняхъ. Всѣ части ея нагрѣлись одинаковымъ образомъ на t^0. Найти происходящее отъ этого увеличеніе давленія на среднюю опору.

Положимъ, что опора B отброшена и вмѣсто нея приложена вертикальная сила, равная единицѣ, и пусть тогда точка B получаетъ вертикальное перемѣщеніе δ. Это перемѣщеніе для насъ послужитъ указателемъ или мѣрой упругости заданной фермы.

Если бы средней опоры не было, то, при равномѣрномъ нагрѣваніи всѣхъ частей, ферма свободно получила бы фигуру подобную первоначальной, но съ увеличеніемъ линейныхъ размѣровъ въ отношеніи

$$1 + \alpha t \text{ къ } 1.$$

Тогда точка B, которая первоначально находилась на величину h ниже прямой AC, опустится на величину

$$h \cdot \alpha t$$

Искомая реакція X опоры B должна уничтожить это пониженіе и вернуть точку B въ прежнее ея положеніе на опорѣ. Для этого потребуется сила, которая во столько разъ больше единицы во сколько $h \cdot \alpha t$ больше δ, т. е.:

$$X = \frac{h \cdot \alpha t}{\delta}$$

148. Общая метода. Мы указали, что въ вопросѣ о вліяніи температуры входятъ двѣ задачи: геометрическая—опредѣленіе перемѣщеній, и механическая—нахожденіе силъ уничтожающихъ эти перемѣщенія. Но и первая задача можетъ быть рѣшена помощію теоремъ Механики. Мы многократно видѣли, что между Статикой и Геометріей существуетъ очень тѣсная связь, и что часто законы Статики доставляютъ лучшій и скорѣйшій способъ доказательства геометрическихъ теоремъ. Примѣняя Статику къ разысканію измѣненія фигуры отъ нагрѣванія, мы весь нашъ вопросъ о вліяніи температуры вводимъ въ циклъ статическихъ задачъ.

Чтобы достигнуть этого предположимъ, что у насъ получились такія же удлиненія какъ отъ нагрѣванія, но что они вызваны механическимъ путемъ, а именно внѣшними силами. Для этого присоединимъ къ дѣйствующимъ нагрузкамъ, еще для каждаго бруска *фиктивную растягивающую силу.*

$$E\omega\alpha t.$$

Здѣсь ω—площадь поперечнаго сѣченія, t—въ градусахъ показываетъ насколько *нагрѣлся* брусокъ. Если произошло *охлажденіе* на t^0, то нужно приложить такую же *сжимающую* силу. Назначая такія силы, мы предполагали, что нашъ брусокъ прямой, имѣетъ постоянное сѣченіе и вездѣ нагрѣтъ одинаково. Если же онъ не прямой, или не постояннаго сѣченія, или температура его не вездѣ одинаково, то его нужно разбить на безконечно малые элементы и приложить по длинѣ каждаго элемента фиктивныя растягивающія силы

$$E\omega\alpha t,$$

измѣняющіяся пропорціонально площади элемента и пропорціонально тому числу градусовъ t, на сколько этотъ элементъ нагрѣтъ.

Эти фиктивныя силы производятъ въ элементахъ бруска тѣ же измѣненія размѣровъ какъ и нагрѣваніе [1]). Вводя ихъ, мы можемъ забыть о нагрѣваніи и получаемъ систему, подверженную исключительно дѣйствію механическихъ силъ, и можемъ прилагать къ ней всѣ выведенныя нами теоремы, для нахожденія реакцій опоръ и другихъ лишнихъ неизвѣстныхъ. Нужно только не позабыть *по окончаніи вычисленій, вычесть* изъ всѣхъ найденныхъ *внутреннихъ напряженій*, величины

$E\alpha t$ кил. на квад. сант.,

представляющія результатъ дѣйствія фиктивныхъ силъ.

---

[1]) Это справедливо только въ томъ случаѣ, если боковая поверхности брусковъ свободны, и не подвержены дѣйствію силъ. Болѣе подробное объясненіе изложено въ приложеніи I.

Этотъ пріемъ замѣны термическихъ явленій механическими ввелъ въ Строительную Механику Меланъ (Melan).

Примѣняя такой пріемъ мы можемъ пользоваться любой изъ теоремъ, выведенныхъ въ предыдущихъ главахъ. Или началомъ наименьшей работы какъ дѣлаетъ Меланъ, или пріемомъ Мора, или теоремой взаимности, или наконецъ теоремой Кастиліано.

149. Примѣры. Ферма (безъ лишнихъ линій) (фиг. 80) лежитъ на трехъ опорахъ A, B, C. Найти измѣненіе давленія X средней опоры, происходящее отъ нагрѣванія на t^0. Рѣшимъ этотъ вопросъ помощію начала наименьшей работы.

Опредѣлимъ натяженія всѣхъ брусковъ фермы, происходящія отъ дѣйствія вертикальной силы X, равной единицѣ, приложенной въ B и уравновѣшиваемой давленіями опоръ A, C. Такія натяженія легко находятся построеніемъ діаграммы напряженій. Употребляя для общаго обозначенія ихъ букву

$$T,$$

получимъ, что истинныя напряженія брусковъ будутъ

$$XT$$

Къ этимъ величинамъ нужно прибавить фиктивныя растягивающія силы, замѣняющія нагрѣваніе; въ результатѣ получимъ напряженія:

$$XT + E\omega\alpha t$$

Потенціальная энергія одного бруска будетъ:

$$(XT + E\omega\alpha t)^2 \frac{l}{2E\omega},$$

а энергія для всей фермы получится какъ сумма подобныхъ выраженій, распространенная на всѣ бруски:

$$V = \Sigma (TX + E\omega\alpha t)^2 \frac{l}{2E\omega}.$$

Примѣняя начало наименьшей работы, напишемъ, что

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

и получаемъ:

$$\Sigma (TX + E\omega\alpha t) \frac{l}{E\omega} T = 0$$

или

$$X \Sigma T^2 \frac{l}{E\omega} + \alpha t\, \Sigma T l = 0$$

откуда найдемъ X.

Истинныя напряженія брусковъ фермы, какъ было указано, представятся произведеніями

$$X \,.\, T.$$

При выводѣ мы предположили, что ферма положена на опоры безъ первоначальнаго напряженія, т. е. что расположеніе опоръ въ точности согласно съ тѣмъ расположеніемъ опорныхъ точекъ фермы, какое имъ придано при сборкѣ. Если бы было иначе, и точка B фермы при постановкѣ на опоры получила вертикальное перемѣщеніе x, относительно прямой AC, то слѣдовало бы примѣнить теорему Кастиліано и писать

$$\frac{\partial V}{\partial X} = x$$

Второй примѣръ. Двухшарнерная арка (фиг. 82). Найти распоръ X, получающійся отъ нагрѣванія на t^0. Лишнихъ брусковъ нѣтъ, и изгибъ вполнѣ уничтоженъ во всѣхъ частяхъ.

Можно было бы рѣшить этотъ вопросъ помощію начала наименьшей работы, буквально также какъ предыдущій примѣръ. Взамѣнъ того примѣнимъ теорему взаимности. Читатель самъ можетъ вмѣсто того воспользоваться пріемомъ Мора.

На фигурѣ 82. I изображены внѣшнія силы дѣйствительнаго случая, т. е. искомый распоръ X. Кромѣ него вводимъ для каждаго бруска, фиктивныя растягивающія силы

$$E\omega\alpha t.$$

Затѣмъ вообразимъ себѣ слѣдующій (второй) случай дѣйствія силъ: (II на фигурѣ 82). Опора B отброшена, а вмѣсто нея приложенъ распоръ равный единицѣ. Опредѣлимъ измѣненія формы происходящія при этомъ Пусть Δ будетъ обозначать уменьшеніе длины AB. Затѣмъ найдемъ напряженія T брусковъ въ этомъ случаѣ; удлиненія ихъ будутъ

$$\frac{T \,.\, l}{E\omega}$$

Эти удлиненія намъ нужны, такъ какъ они представляютъ перемѣщенія для втораго случая, на которыя будетъ умножаться растягивающая сила

$$E\omega\alpha t.$$

Затѣмъ примѣняемъ теорему взаимности:

Первый случай.		**Второй случай.**
A. Силы.		*A. Перемѣщенія.*
1. Распоръ X.	1.	Δ.
2. $E\omega\alpha t$.	2.	$\dfrac{T \cdot l}{E\omega}$
B. Перемѣщенія.		*B. Силы.*
1. Для силы X оно равно нулю.	1.	$X = 1$.
2. Для другихъ силъ перемѣщенія намъ не нужны.	2.	T.

Теорема взаимности даетъ:

$$X\Delta + \Sigma E\omega\alpha t \frac{Tl}{E\omega} = 0$$

$$X = -\frac{\alpha t}{\Delta} \Sigma Tl \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Для нахожденія X нужно знать: во первыхъ величины T; онѣ получаются проще всего построеніемъ діаграммы напряженій для случая II; во вторыхъ нужно знать перемѣщеніе Δ. Послѣднее можно было бы найти построивъ діаграмму перемѣщеній. Но это сложно. Взамѣнъ того опредѣлимъ Δ, примѣнивъ начало возможныхъ перемѣщеній къ силамъ и перемѣщеніямъ II-го случая. Получимъ:

$$1^k . \Delta - \Sigma T \frac{Tl}{E\omega} = 0$$

$$\Delta = \Sigma T^2 \frac{l}{E\omega}$$

По этому, изъ (74), получаемъ:

$$X = -\alpha t \cdot \frac{\Sigma T l}{\Sigma T^2 \dfrac{l}{E\omega}}.$$

Конечно это рѣшеніе буквально согласуется съ тѣмъ, которое даетъ начало наименьшей работы. Въ обоихъ случаяхъ требуется построеніе только одной *діаграммы напряженій* для случая $X=1$.

150. Третій примѣръ. Двухшарнерная арка сплошнаго сѣченія (фиг. 83). Равномѣрное нагрѣваніе на t^0. Найти горизонтальный распоръ X вызываемый этимъ нагрѣваніемъ.

Здѣсь нужно къ каждому волокну арки приложить фиктивныя растягивающія силы

$$E\alpha t$$

на квадр. сантиметръ.

Возьмемъ произвольное сѣченіе арки, напр. α (фиг. 84); дѣйствіе части, отдѣляемой этимъ сѣченіемъ, на волокна прилегающія къ сѣченію, выразится нѣкоторой сжимающей силой Q, и моментомъ M. По этому напряженіе, нѣкотораго волокна будетъ

$$-\frac{Q}{\Omega}-\frac{Mz}{I}\text{ [1])}$$

(Ω—площадь поперечнаго сѣченія арки; I—моментъ инерціи сѣченія). Сюда нужно прибавить фиктивныя растягивающія силы [2]),

$$E\alpha t$$

и мы получимъ полное напряженіе:

$$E\alpha t-\frac{Q}{\Omega}-\frac{Mz}{I}$$

Если площадь волокна есть ω, а длина ∂s, то потенціальная энергія его будетъ:

$$\left(E\alpha t-\frac{Q}{\Omega}-\frac{Mz}{I}\right)^2\cdot\frac{\omega\partial s}{2E}$$

Для полученія энергіи всѣхъ волоконъ, прилегающихъ къ взятому сѣченію, нужно суммировать такія величины, распространяя сумму на всю площадь сѣченія. Получимъ:

$$\Sigma\left\{E\alpha t-\frac{Q}{\Omega}-\frac{Mz}{I}\right\}^2\cdot\frac{\omega\partial s}{2E}$$

А для вычисленія потенціальной энергіи всей арки, отъ одной пятки до другой, надлежитъ интегрировать послѣднее выраженіе по всей длинѣ арки S. Окончательно получается

$$V=\int_0^S\Sigma\left\{E\alpha t-\frac{Q}{\Omega}-\frac{Mz}{I}\right\}^2\cdot\frac{\omega\partial s}{2E}$$

---

[1]) Знакъ минусъ означаетъ сжатіе.

[2]) Эти силы при положительномъ t (нагрѣваніе) будутъ положительны, а при охлажденіи—отрицательныя.

Примѣняя начало наименьшей работы, мы должны дифференцировать это выраженіе по искомой неизвѣстной X. Какъ величина силы Q, такъ и моментъ M, зависятъ отъ распора X, слѣд. будемъ имѣть:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = -\int_0^S \Sigma \left\{ E\alpha t - \frac{Q}{\Omega} - \frac{Mz}{I} \right\} \left\{ \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{z}{I} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \right\} \frac{\omega \partial s}{E} = 0 \quad . \ . \ . (75)$$

Для дальнѣйшаго разбора вопроса необходимо назначить геометрическую фигуру оси арки; она опредѣляетъ зависимость Q и M отъ распора X.

151. Случай параболической арки. Мы доведемъ вычисленіе до конца для случая параболической арки. Для ускоренія вычисленія сдѣлаемъ съ самаго начала нѣкоторыя допущенія. Будемъ считать, что площадь поперечнаго сѣченія и моментъ инерціи его одинаковы по всей длинѣ арки.

Затѣмъ замѣнимъ элементъ дуги ∂s, элементомъ общины ∂x. Такое допущеніе не ведетъ къ замѣтной ошибкѣ въ тѣхъ случаяхъ, когда арка отлогая, т. е. когда стрѣлка ея составляетъ небольшую долю пролета. А именно въ этихъ случаяхъ и получается наибольшее вліяніе температуры.

Уравненіе параболы, имѣющей стрѣлку h при пролетѣ l (фиг. 85), будетъ:

$$y = x(l - x) \cdot \frac{4h}{l^2} \quad . \ . \ . (76).$$

Моментъ M для какой нибудь точки D будетъ

$$M = -X \cdot y.$$

Здѣсь мы взяли знакъ минусъ потому, что этотъ моментъ вращаетъ въ сторону противуположную той, которая нами была назначена при общемъ выводѣ на фиг. 84.

Затѣмъ сжимающая сила Q будетъ

$$X \cdot Cos\,\varphi,$$

гдѣ φ есть уголъ между касательной въ любой точкѣ арки и направленіемъ силы X. Но такъ какъ мы рѣшили пренебрегать разницей между элементомъ дуги ∂s и проекціей этого элемента ∂x, то при такой степени приближенія должны считать, что

$$Cos\,\varphi = 1$$

и сжимающая сила

$$Q = X.$$

При этомъ получимъ

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -y;\ \frac{\partial Q}{\partial X} = 1$$

Вставимъ всѣ эти частныя значенія въ общее уравненіе (75). Предѣлы интегрированія теперь будутъ опредѣляться абсциссами концовъ арки; эти предѣлы будутъ 0 и l. Получается слѣдующій результатъ:

$$\int_0^l \sum \left[E\alpha t - \frac{X}{\Omega} + X \cdot \frac{z}{I} \cdot y \right] \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{z}{I} \cdot y \right) \omega dx = 0$$

или послѣ перемноженія:

$$\int_0^l \sum \left[\frac{E\alpha t}{\Omega} - \frac{X}{\Omega^2} + \frac{X}{\Omega} \cdot \frac{z}{I}\, y - E\alpha t\, \frac{z}{I} \cdot y + \right.$$

$$\left. + \frac{X}{\Omega} \cdot \frac{z}{I} \cdot y - X \left(\frac{z}{I} \right)^2 \cdot y^2 \right] \omega dx = 0$$

Сначала произведемъ суммированіе означенное знакомъ

$$\Sigma,$$

а потомъ приступимъ къ интегрированію.

Суммированіе наше относится къ элементамъ поперечнаго сѣченія; каждый элементъ даетъ особый членъ суммы, и эти члены могутъ отличаться другъ отъ друга величинами ω и z; всѣ же прочіе множители одинаковы для всѣхъ членовъ суммы. Сообразивъ это, и оставивъ на время въ сторонѣ постоянные множители, мы видимъ, что у насъ войдутъ суммы слѣдующихъ трехъ родовъ:

$$\Sigma\omega$$

$$\Sigma z\omega$$

$$\Sigma z^2\omega.$$

Первая изъ этихъ суммъ—сумма площадей элементовъ—есть ничто иное какъ площадь всего поперечнаго сѣченія

$$\Omega.$$

Вторая сумма, по извѣстному свойству центра тяжести, равна нулю.

Наконецъ третья—есть ничто иное какъ моментъ инерціи поперечнаго сѣченія

$$I.$$

Вмѣсто него можно ввести выраженіе

$$\Omega \,.\, k^2,$$

гдѣ k есть плечо инерціи поперечнаго сѣченія.

Дѣлая всѣ подстановки въ послѣднее уравненіе и сокращая, получимъ:

$$\int_0^l \left(E\alpha t - \frac{X}{\Omega} - \frac{X}{\Omega} \cdot \frac{y^2}{k^2} \cdot \right) dx = 0 \;.\;\;.\;\;.\;\;. \;(77)$$

Назначенное здѣсь интегрированіе производится безъ труда. Первые два члена дадуть интегралъ

$$\left(E\alpha t - \frac{X}{\Omega} \right) \cdot l;$$

Послѣдній же членъ даетъ:

$$-\frac{X}{\Omega} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \int_0^l y^2 \,.\, dx$$

Сюда нужно подставить для y выраженіе (76). Послѣ того интегрированіе производится безъ труда, такъ какъ имѣемъ дѣло съ цѣлыми функціями. Въ результатѣ получаемъ:

$$\int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} h^2 l \;{}^{1})$$

---

[1]) Эту формулу можно получить очень быстро и почти непосредственно, если считать извѣстнымъ тотъ результатъ, что центръ тяжести G параболическаго сегмента ABC (фиг. 85) находится на разстояніи

$$\frac{2}{5} h$$

отъ хорды AB.

Послѣ подстановокъ получаемъ изъ урав. (77) слѣдующее:

$$\left(E\alpha t - \frac{X}{\Omega}\right) l - \frac{X}{\Omega k^2} \cdot \frac{8}{15}\, h^2 l = 0;$$

откуда

$$X = \frac{15 E\alpha t\Omega}{15 + 8\,\dfrac{h^2}{k^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

152. Четвертый примѣръ. Прямая балка, лежащая на большомъ числѣ опоръ. Разберемъ дѣйствіе неравномѣрнаго нагрѣванія. Положимъ что нижній поясъ защищенъ полотномъ дороги отъ дѣйствія солнечныхъ лучей и потому нагрѣвается меньше верхняго. Допустимъ что температура балки измѣняется равномѣрно сверху до низу; температуру нейтральнаго слоя будемъ считать нулевой, и предположимъ, что температуры другихъ слоевъ измѣняются пропорціонально разстояніямъ этихъ слоевъ отъ нейтральнаго. Пусть Δt есть разность температуръ крайнихъ волоконъ верхняго и нижняго поясовъ. Тогда, называя высоту балки черезъ h, получимъ нагрѣваніе волоконъ, лежащихъ на разстояніи z отъ нейтральнаго слоя:

$$t = \frac{z\Delta t}{h}$$

Для волоконъ лежащихъ выше нейтральнаго слоя, это будетъ величина положительная, нагрѣваніе; имъ соотвѣтствуютъ положительны z. Для волоконъ, расположенныхъ ниже нейтральнаго слоя, z отрицательное, и получается охлажденіе.

По правилу Меланъ, мы должны къ каждому волокну выше нейтральнаго слоя (фиг. 86) приложить растягивающія силы

$$E\omega \frac{z}{h}\, \alpha\Delta t$$

гдѣ ω—площадь волокна, α—коеффиціентъ расширенія отъ тепла. Для волоконъ ниже нейтральнаго слоя нужно приложить такія же сжимающія силы.

Вся эта совокупность силъ можетъ быть замѣнена двумя парами, приложенными на концахъ балки (фиг. 86-bis), и имѣющими каждая слѣдующій моментъ:

$$M = \Sigma E\omega \frac{z^2}{h}\, \Delta t\alpha = \frac{E\alpha\Delta t}{h}\, \Sigma\omega z^2 = \frac{EI\alpha\Delta t}{h}$$

гдѣ I—означаетъ моментъ инерціи поперечнаго сѣченія балки.

Эти пары должны быть включены въ число внѣшнихъ силъ. Разсмотримъ ихъ дѣйствіе на балку, и для этого примѣнимъ теорему о трехъ моментахъ.

Введенныя нами силы даютъ одинаковый по всей длинѣ балки отрицательный моментъ изгиба

$$M = \frac{EI\alpha}{h} \cdot \Delta t$$

Графически площадь этихъ моментовъ изгиба изобразится прямоугольникомъ, простирающимся по всей длинѣ балки, и имѣющимъ высоту равную M (фиг. 87).

Примѣняя теорему о трехъ моментахъ, мы возьмемъ какія нибудь три смежныя опоры A, B, C. и назовемъ опорные моменты для нихъ черезъ

$$M_1,\ M_2,\ M_3.$$

Давленіе отъ общей моментной площади на опору B должно быть равно нулю. Эта площадь состоитъ изъ двухъ частей: a) площади $ADEFCBA$, которая даетъ на B давленіе

$$\frac{1}{6}\left\{M_1 \cdot l + 2M_2(l + l') + M_3 l'\right\}$$

b) площади $ABC\,C'B'A'$, которая отрицательная такъ какъ пара, дѣйствующая на лѣвомъ концѣ балки, вращаетъ въ сторону противную часовой стрѣлкѣ. Эта площадь даетъ на B давленіе

$$-\frac{(l + l')}{2} \cdot \frac{EI\alpha}{h} \cdot \Delta t$$

Поэтому суммируя эти два давленія, получимъ:

$$\frac{1}{6} \cdot \left\{M_1\, l + 2M_2(l + l') + M_3\, l'\right\} - \frac{(l + l')}{2}\frac{EI}{h} \cdot \alpha \cdot \Delta t = 0$$

или

$$M_1\, l + 2M_2(l + l') + M_3\, l' = 3 \cdot (l + l')\frac{EI}{h} \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

Такую форму получаетъ уравненіе трехъ моментовъ въ вопросѣ о дѣйствіи температуры. Затѣмъ рѣшеніе ничѣмъ не отличается отъ обыкновеннаго рѣшенія вопроса о неразрѣзныхъ балкахъ. Нужно составить уравненія подобныя предыдущему для каждыхъ трехъ смежныхъ опоръ. Получится число уравненій равное числу неизвѣстныхъ опорныхъ моментовъ, и всѣ эти моменты могутъ быть опредѣлены. Рѣшеніе можетъ быть ведено или вычисленіемъ или графически, построивъ сначала постоянныя точки перегиба.

153. Измѣненія температуры, производящія въ фермахъ реакціи и напряженія, должны считаться отъ той температуры, которая имѣла мѣсто во время сборки фермы. При составленіи проекта такая начальная температура можетъ быть приблизительно извѣстна, если уже назначены контрактныя сроки исполненія работъ. Въ противномъ случаѣ относительно нормальной температуры имѣется нѣкоторая неопредѣленность.

Напряженія отъ температуры будутъ наименьшія если сборка происходитъ при средней годовой температурѣ. Если же вмѣсто того температура сборки близка къ крайней годовой температурѣ (лѣтней или зимней), то измѣненіе температуры можетъ почти удвоиться, вызывая увеличеніе реакцій и напряженій въ той же пропорціи.

Если мостъ имѣетъ нѣсколько одинаковыхъ пролетовъ, покрываемыхъ тождественными фермами, но сборка отдѣльныхъ фермъ происходитъ въ разное время года, то температурныя напряженія въ нихъ будутъ различныя.

Такой случай представился напр. при сборкѣ арочнаго моста черезъ Неккаръ, между Штутгардтомъ и Канштатомъ (König-Karls Brücke). Отдѣльные пролеты моста собирались при слѣдующихъ температурахъ:

$$0^0,\ 5^0,\ 15^0,\ 25^0\ C.$$

Чтобы устранить различіе температурныхъ напряженій въ разныхъ пролетахъ и уменьшить напряженія тѣхъ фермъ, которыя собирались при крайнихъ предѣлахъ температуры, строитель моста, инженеръ Кюблеръ, ввелъ для арки искусственный, первоначальный распоръ, помощію котораго фигура всѣхъ отдѣльныхъ фермъ во время сборки была сдѣлана такой, что при средней годовой температурѣ этой мѣстности, (оказавшейся, на основаніи пятнадцатилѣтнихъ метеорологическихъ наблюденій, въ $10^0\ C$), всѣ фермы получатъ одинаковое напряженіе.

Для такого приведенія всѣхъ фермъ къ средней температурѣ необходимъ искусственный распоръ [1]). Онъ можетъ быть нулемъ,

---

[1]) Искуственный распоръ примѣняется при сборкѣ арочныхъ мостовъ иногда и съ другою цѣлью. Помощію его стараются уничтожить изгибъ, производимый собственнымъ вѣсомъ моста. Когда это достигнуто, то дѣйствіе собственнаго вѣса вызываетъ въ аркѣ только сжатіе по оси ея.

при низшей изъ температуръ сборки, и долженъ быть тѣмъ больше, чѣмъ выше температура сборки. Такъ какъ наши правила даютъ возможность опредѣлить измѣненія фигуры, происходящее отъ произвольныхъ силъ, то вычисленіе величины потребнаго искусственнаго распора не представитъ затрудненія. (см. главу VIII).

154. Практическое воспроизведеніе вычисленнаго распора во время сборки упомянутаго моста было достигнуто помощію заклиниванія пятокъ арки; при этой работѣ строитель воспользовался тѣмъ измѣненіемъ длины арки, которое получалось отъ нагрѣванія ея лучами солнца. Ферма ставилась на свое мѣсто, поддерживалась подмостями, и пятки ея заклинялись на устояхъ. При нагрѣваніи ея лучами солнца, она удлинялась и поднимаясь отдѣлялась отъ подмостей. Тогда подкладывали подъ нее деревянныя подкладки, чтобы опять достигнуть подпиранія арки подмостями. Затѣмъ къ ночи арка, охлаждаясь, укорачивалась, и пятки ея отходили отъ устоевъ, образуя здѣсь зазоръ. Его сейчасъ уничтожали забивая, имѣющіяся у пятки клинья. Повторяя такую операцію нѣсколько дней сряду, можно было получить желаемый распоръ [1]).

---

[1]) См. Weyrauch. Die Elastischen Bogenträger. 2 Aufl. s. 290.

ГЛАВА X.

Заключительныя замѣчанія.

155. Степень сложности вопроса. Сложность вопроса и соотвѣтствующая сложность рѣшенія быстро возрастаютъ съ увеличеніемъ числа *лишнихъ* неизвѣстныхъ. Всего проще рѣшаются вопросы, въ которые входитъ только одна лишняя неизвѣстная. Сюда относятся, изъ числа употребительныхъ конструкцій, слѣдующія:

a) двухшарнерныя арки,

b) арки съ затяжкой,

c) цѣпной мостъ, усиленный жесткой балкой,

d) балки на трехъ опорахъ.

Затѣмъ слѣдуютъ случаи системъ, въ которыхъ имѣются двѣ лишнія неизвѣстныя. Это системы дважды статически неопредѣлимыя. Примѣромъ можетъ служить балка, лежащая на 4-хъ опорахъ.

Еще сложнѣе рѣшеніе для системъ трижды статически неопредѣлимыхъ гдѣ имѣются три лишнія неизвѣстныя. Въ качествѣ примѣра укажемъ на арку съ закрѣпленными пятками.

Наибольшую сложность представляютъ рѣшенія для общихъ случаевъ системъ съ произвольнымъ числомъ лишнихъ неизвѣстныхъ. Одна изъ такихъ системъ имѣетъ особое значеніе въ строительномъ дѣлѣ. Это неразрѣзная балка, лежащая на произвольномъ числѣ опоръ. На этотъ вопросъ были обращены труды многихъ математиковъ и инженеровъ, и соединенными усиліями ихъ, послѣ продолжительной разработки, достигнуто сравнительно простое рѣшеніе, вполнѣ пригодное для примѣненія его въ строительныхъ расчетахъ. Такое рѣшеніе основано главнымъ образомъ на трудахъ: Клапейрона и Бертò нашедшихъ теорему о трехъ моментахъ, Бресса—

открывшаго существованіе такъ называемыхъ нулевыхъ точекъ или постоянныхъ точекъ перегиба, Мора—съ особымъ успѣхомъ примѣнившаго къ этому вопросу пріемы Графической Статики и другихъ.

156. Пріемы для упрощенія рѣшенія. Часто ведутъ расчетъ приблизительно, дѣлая, для упрощенія, нѣкоторыя отступленія отъ дѣйствительности. Изъ числа такихъ примѣняемыхъ допущеній укажемъ на слѣдующія:

a) Считаютъ, что поперечное сѣченіе каждаго изъ двухъ поясовъ одинаково по всей длинѣ фермы. При томъ иногда допускаютъ сверхъ того, что сѣченія верхняго и нижняго поясовъ равны между собою.

b) Для конструкцій съ многоугольными поясами, имѣющихъ равныя панели, допускаютъ, что длина стержней одного и того же пояса одинакова во всѣхъ панеляхъ.

c) При опредѣленіи измѣненія фигуры и нахожденіи перемѣщеній узловъ фермы, пренебрегаютъ измѣненіемъ длины раскосовъ, которые соединяютъ два пояса. Т. е. считаютъ эти раскосы абсолютно жесткими; тогда измѣненіе фигуры и перемѣщенія узловъ опредѣляются исключительно лишь измѣненіями длины тѣхъ стержней, изъ которыхъ составлены пояса.

d) Поѣздъ замѣняютъ равномѣрно распредѣленнымъ грузомъ.

e) Собственный вѣсъ фермы замѣняютъ грузами сосредоточенными въ тѣхъ узлахъ, на которые передается подвижная нагрузка.

f) Въ цѣпныхъ мостахъ пренебрегаютъ энергіей подвѣсокъ.

157. Выборъ, какія неизвѣстныя считать лишними. Число лишнихъ неизвѣстныхъ вполнѣ опредѣленное, и указывается разностью между числомъ всѣхъ неизвѣстныхъ и числомъ условій равновѣсія, которыя могутъ быть составлены. Но иногда отъ нашего произвола зависитъ *какія именно изъ неизвѣстныхъ* считать *лишними*, и какія—*необходимыми для образованія жесткой системы*. Напр. если раскосы фермы представляютъ андреевскіе кресты (фиг. 88), то отъ насъ зависитъ какую изъ двухъ діагоналей a, b, приходящихся въ одной панели, считать лишнею. Если брусокъ свободно лежитъ на четырехъ опорахъ, то мы можемъ считать лишними неизвѣстными давленія двухъ какихъ угодно изъ этихъ опоръ, и т. д.

Хорошимъ примѣромъ такого произвола въ выборѣ лишнихъ неизвѣстныхъ можетъ служить неразрѣзная ферма, представленная на фиг. 89. Она лежитъ на четырехъ опорахъ и подвергается дѣйствію вертикальной нагрузки. Здѣсь мы можемъ считать лишними неизвѣстными вертикальныя давленія двухъ какихъ нибудь опоръ. Взамѣнъ того можно считать лишними бруски x, y, отбрасывая которые мы получаемъ, вмѣсто неразрѣзной четырехъ-опорной фермы, три отдѣльныя фермы, лежащія каждая на двухъ опорахъ. Можно также считать лишними два какіе нибудь другіе бруска напр., z, t, отбрасывая которые превращаемъ нашу ферму въ одинъ изъ видовъ такъ называемой фермы Гербера, или уравновѣшенной фермы, нерѣдко примѣняемой при постройкѣ мостовъ, лежащей на четырехъ опорахъ; (съ одной изъ опоръ должно быть неподвижное соединеніе, а съ тремя остальными—скользящее).

Иногда надлежащимъ выборомъ лишней неизвѣстной можно значительно упростить рѣшеніе. Такъ какъ всегда приходится строить діаграммы для напряженій или для перемѣщеній, то нужно подбирать лишнія неизвѣстныя такъ, чтобы эти построенія оказались наиболѣе простыми. Для примѣра укажемъ на арочную двухшарнерную ферму (фиг. 90). Въ ней можно сдѣлать слѣдующія два предположенія: 1) Считаемъ лишней неизвѣстной напряженіе бруска T. 2) Считаемъ лишней неизвѣстной горизонтальный распоръ X.

При первомъ предположеніи, замѣняя T внѣшней силой, мы превращаемъ нашу ферму въ трехшарнерную арку; (A, B, C—шарнеры). А при второмъ она дѣлается простой балочной фермой. Такъ какъ всѣ построенія діаграммъ для трехшарнерной фермы значительно сложнѣе чѣмъ для балочной фермы, то слѣдуетъ отдать предпочтеніе второму изъ этихъ двухъ предположеній.

Для случая (фиг. 89) наиболѣе простое рѣшеніе получится если будемъ считать лишними неизвѣстными давленія двухъ среднихъ опоръ.

ПРИЛОЖЕНІЕ I.

Общій разборъ вопроса о вліяніи температуры на напряженія.

1. Основныя положенія. При разсмотрѣніи вліянія температуры на упругія напряженія, мы будемъ руководствоваться тѣмъ взглядомъ на этотъ вопросъ, который давно уже былъ установленъ въ наукѣ Дюгамелемъ и Францемъ Нейманомъ. Воззрѣніе этихъ ученыхъ основывается на нѣкоторыхъ допущеніяхъ, которыя не абсолютно точны. Но, принимая эти допущенія, мы не дѣлаемъ значительныхъ ошибокъ, которыя могли бы оказать существенное вліяніе на результаты, важное въ практическомъ отношеніи. Притомъ не надобно забывать, что точное рѣшеніе вопроса о дѣйствіи температуры на инженерныя сооруженія невозможно уже потому, что распредѣленіе температуры въ частяхъ этихъ сооруженій извѣстно намъ только съ грубымъ приближеніемъ. Ошибки, происходящія отъ не точнаго знанія этого распредѣленія, значительно больше, чѣмъ тѣ, которыя получаются отъ принятія основныхъ допущеній, или гипотезъ Дюгамеля и Неймана.

Всѣ наши выводы по этому вопросу будутъ относиться исключительно къ тѣламъ изотропнымъ. Одинаковость физическихъ свойствъ матеріала по всѣмъ направленіямъ указываетъ намъ, что при равномѣрномъ нагрѣваніи прямоугольнаго бруска, или прямоугольнаго элемента тѣла, будутъ соблюдены слѣдующія условія: во-первыхъ не произойдетъ сдвиговъ, т. е. прямые углы не перемѣнятся; во-вторыхъ—получатся одинаковыя удлиненія по всѣмъ тремъ направленіямъ.

Далѣе мы допустимъ, что коеффиціентъ линейнаго расширенія отъ теплоты не зависитъ отъ упругихъ силъ или напряженій внутри тѣла; мы считаемъ, что каковы бы ни были эти силы, всегда означенный коеффиціентъ одинъ и тотъ же и сохраняетъ ту свою величину, которую онъ имѣетъ въ случаѣ полнаго отсутствія напряженій. Эта величина коеффиціента, получающаяся при отсутствіи напряженій, и опредѣляется извѣстными физическими пріемами; ею мы и будемъ дальше пользоваться. Для желѣза этотъ коеффиціентъ можно считать равнымъ

$$0{,}000012$$

на градусъ Цельзія.

Затѣмъ поставимъ слѣдующее основное положеніе: явленія расширенія отъ теплоты и явленія удлиненія отъ силъ независимы однѣ отъ другихъ и прямо складываются алгебрически. Это положеніе выразимъ формулами, взявши сначала случай *однороднаго* измѣненія формы, сопровождаемаго равномѣрнымъ нагрѣваніемъ всего объема.

2. Выводы изъ этихъ основныхъ положеній. Если бы напряженій не было, то равномѣрное нагрѣваніе на t градусовъ вызвало бы одинаковое расширеніе тѣла по направленію трехъ осей координатъ, и величина такого относительнаго удлиненія была бы

$$\alpha \,.\, t,$$

гдѣ α—коеффиціентъ расширенія отъ тепла.

Съ другой стороны, если бы не было нагрѣванія, а дѣйствовали бы нѣкоторыя силы, то связь между этими силами и удлиненіями

$$e,\ f,\ g$$

по направленію трехъ осей x, y, z выражалась бы формулами (см. n^0 41).

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{E}{1+k}\left(e + \frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right) \\ Q &= \frac{E}{1+k}\left(f + \frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right) \\ R &= \frac{E}{1+k}\left(g + \frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right) \end{aligned}\right\} \quad . \;. \;. \;. \;(79)$$

Здѣсь P, Q, R—растягивающія силы, направленныя по осямъ x, y, z. На сдвигающія касательныя силы

$$S,\ T,\ U$$

температура не вліяетъ, и потому мы ихъ и не будемъ разсматривать.

Предположимъ теперь, что у насъ дѣйствуютъ одновременно и механическія силы и нагрѣваніе. На основаніи нашего положенія о независимости дѣйствія силъ и температуры, мы видимъ, что въ предыдущихъ формулахъ придется сдѣлать измѣненія. Теперь внутреннія напряженія или упругія силы будутъ вызываться не полными величинами удлиненій

$$e,\ f,\ g,$$

а только разностями

$$e-\alpha t,\ f-\alpha t,\ g-\alpha t.$$

Здѣсь вычитаемая часть

$$\alpha t$$

представляетъ то удлиненіе, которое свободно вызывается нагрѣваніемъ, и не производитъ никакихъ напряженій. Поэтому теперь, когда мы разсматриваемъ дѣйствіе нагрѣванія, нужно въ наши формулы (79) вставить вмѣсто удлиненій

$$e,\ f,\ g$$

указанныя разности. Дѣлая это, получимъ, послѣ простыхъ алгебраическихъ преобразованій:

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{E}{1+k}\left(e+\frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right)-\frac{E.\alpha t}{1-2k}\\ Q&=\frac{E}{1+k}\left(f+\frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right)-\frac{E.\alpha t}{1-2k}\\ R&=\frac{E}{1+k}\left(g+\frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right)-\frac{E.\alpha t}{1-2k}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (80).$$

Таковы общія выраженія для упругихъ силъ, изъ которыхъ получаются всѣ частные случаи.

3. Примѣръ. Пусть напримѣръ у насъ устроены приспособленія препятствующія измѣненію размѣровъ тѣла, такъ что, не смотря на нагрѣваніе, размѣры тѣла остаются прежними. Тогда имѣемъ

$$e=f=g=0$$

и изъ предыдущихъ формулъ находимъ:

$$P=Q=R=-\frac{E.\alpha t}{1-2k}$$

Отрицательный знакъ показываетъ, что силы будутъ сжимающія. И такъ въ этомъ случаѣ тѣло будетъ подвержено давленію, одинаковому со всѣхъ сторонъ (или иначе—*гидростатическому давленію*), и величина этой силы на единицу поверхности дана предыдущей формулой. Взявши для Пуассонова отношенія величину

$$k = \frac{1}{3}$$

получимъ давленіе

$$3 \,.\, E\alpha t$$

т. е. для желѣза

72 кил. на квад. сант. при нагрѣваніи на одинъ градусъ Цельзія.

4. Толкованіе общихъ формулъ (80). Мы будемъ сравнивать ихъ съ формулами (79), представляющими явленіе, которое получается при отсутствіи нагрѣванія, и такимъ образомъ выведемъ нѣчто въ родѣ эквивалентности дѣйствій термическихъ и механическихъ, по отношенію къ вызываемымъ ими упругимъ напряженіямъ.

Сначала приведемъ уравненія (80) въ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} P + \frac{E\,.\,\alpha t}{1-2k} &= \frac{E}{1+k}\left(e + \frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right) \\ Q + \frac{E\,.\,\alpha t}{1-2k} &= \frac{E}{1+k}\left(f + \frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right) \\ R + \frac{E\,.\,\alpha t}{1-2k} &= \frac{E}{1+k}\left(g + \frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right) \end{aligned}\right\} \quad . \;.\; .\; .\; (81)$$

Сравнивая эту новую форму уравненій съ (79), мы можемъ истолковать уравненія (81) въ видѣ слѣдующей теоремы (ее назовемъ *первой*).

Деформаціи (т. е. удлиненія e, f, g) для случая нагрѣванія могутъ быть получены изъ формулъ когда нагрѣванія нѣтъ, но только тогда въ этихъ послѣднихъ формулахъ нужно къ числу дѣйствительныхъ внѣшнихъ силъ прибавить фиктивныя силы, а именно три системы растягивающихъ силъ, идущихъ по тремъ осямъ координатъ, и равныхъ каждая

$$\frac{E\,.\,\alpha t}{1-2k} \text{ кил. на квад. сантиметръ.}$$

Эта теорема приводитъ вопросъ, которымъ мы занимаемся въ этой главѣ, къ прежнему уже рѣшеному нами вопросу о разысканіи измѣненій формы, производимыхъ исключительно механическими дѣйствіями. Все здѣсь сводится къ прибавленію указанныхъ трехъ системъ растягивающихъ силъ.

Затѣмъ обратимся къ первоначальной формѣ уравненій (80). Здѣсь P, Q, R представляютъ внѣшнія силы, но *при однородной деформаціи* внутреннія силы равны внѣшнимъ. По этому можно смотрѣть на уравненія (80) какъ на формулы, указывающія величины внутреннихъ силъ въ случаѣ нагрѣванія. Ихъ будемъ сравнивать съ уравненіями (79), указывающими величины внутреннихъ силъ, когда нагрѣванія нѣтъ. Результатомъ сравненія явится слѣдующая теорема, которую назовемъ *второй*.

При одинаковыхъ деформаціяхъ (т. е. одинаковыхъ e, f, g) внутреннія силы для случая нагрѣванія отличаются отъ силъ, когда нагрѣванія нѣтъ, прибавочнымъ гидростатическимъ давленіемъ

$$\frac{E \,.\, \alpha t}{1-2k}.$$

Эти двѣ общія теоремы исчерпываютъ вопросъ и приводятъ случай нагрѣванія къ извѣстному рѣшенію о дѣйствіи исключительно механическихъ силъ.

При этомъ мы разсматривали случай *однородной* деформаціи, но выводы легко примѣняются и къ общему случаю какой угодно деформаціи. Только тогда нужно разбить всѣ тѣло на элементы и разсматривать каждый изъ нихъ особо. Деформація элемента всегда однородная. Поэтому выведенное нами всецѣло примѣняется къ каждому элементу, а слѣдовательно и къ ихъ совокупности.

Окончательно получаемъ слѣдующее общее правило:

Нужно къ числу внѣшнихъ силъ прибавить слѣдующія фиктивныя силы: для каждаго элемента три системы растягивающихъ силъ, идущихъ по осямъ x, y, z и равныхъ каждая:

$$\frac{E\omega \,.\, \alpha t}{1-2k}$$

Затѣмъ находимъ всѣ явленія, вызываемыя внѣшними силами, т. е. находимъ деформаціи (удлиненія e, f, g, и сдвиги a, b, c [1]) для каждаго элемента тѣла), и внутреннія силы. Полученныя такимъ путемъ деформаціи будутъ истинныя. Что же касается найденныхъ

[1]) Эти сдвиги не зависятъ отъ температуры и остаются такіе же какъ и при отсутствіи нагрѣванія.

внутреннихъ силъ, то къ нимъ нужно прибавить гидростатическое давленіе

$$\frac{E \, . \, \alpha t}{1-2k};$$

результатъ такой прибавки даетъ истинныя внутреннія силы.

5. Частный случай. Для вопросовъ Строительной Механики наибольшее значеніе имѣетъ тотъ случай, когда для каждаго элемента тѣла отсутствуютъ боковыя нормальныя силы, а имѣется только одна продольная, направленная по оси этого элемента. Т. е., при нашемъ обозначеніи, отсутствуютъ силы

$$Q \text{ и } R,$$

и остается только продольная сила P (а также могутъ входить касательныя силы, вызывающія сдвигъ; но эти послѣднія не зависятъ отъ температуры).

Въ этомъ частномъ случаѣ имѣемъ изъ уравн. (80):

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{E}{1+k}\left(e+\frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right)-\frac{E\,.\,\alpha t}{1-2k} \\ 0 &= \frac{E}{1+k}\left(f+\frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right)-\frac{E\,.\,\alpha t}{1-2k} \\ 0 &= \frac{E}{1+k}\left(g+\frac{k}{1-2k}(e+f+g)\right)-\frac{E\,.\,\alpha t}{1-2k} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (82)$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій системы (82) получаемъ:

$$f = g = -\,k \, . \, e + (1+k) \, . \, \alpha t$$

А, подставляя это выраженіе въ первое изъ уравненій системы (82), найдемъ

$$P = E\,(e - \alpha t) \quad . \; . \; . \; . \; (83)$$

Конечно этотъ результатъ мы бы могли получить прямо и непосредственно, не переходя отъ общаго случая къ частному. Дѣйствительно, если при растяженіи бруска боковыхъ силъ нѣтъ, то, при отсутствіи нагрѣванія, зависимость между растягивающей силой и удлиненіемъ представляется формулой

$$P = E \, . \, e \quad . \; . \; . \; . \; (84).$$

А пользуясь положеніемъ о независимости механическихъ и термическихъ явленій, получимъ изъ (84) для случая нагрѣванія формулу (83).

Поступая съ уравненіями (83) и (84) совершенно такъ какъ мы это дѣлали для общаго случая, мы безъ труда выведемъ для нашего частнаго случая двѣ теоремы, подобныя тѣмъ, которыя получились для общаго случая:

Первая теорема. Она получается когда формулу (83) представимъ въ видѣ

$$P + E\alpha t = Ee$$

и будемъ сравнивать съ (84). Оказывается: удлиненіе e въ случаѣ нагрѣванія получается такое, какъ будто бы, кромѣ истинной растягивающей силы, дѣйствовала еще прибавочная фиктивная сила

$$E\alpha t.$$

Вторая теорема. Такъ какъ при однородной деформаціи внутреннія силы равны внѣшнимъ, то на форм. (83) можно смотрѣть какъ на уравненіе опредѣляющее внутреннее напряженіе. Тогда ее можно прочесть такъ:

въ случаѣ нагрѣванія внутренняя сила, *при томъ же удлиненіи*

$$e,$$

отличается отъ напряженія, получающагося безъ нагрѣванія, вычитаемымъ членомъ

$$-E\alpha t \text{ (на ед. площади)}.$$

6. Неоднородная деформація. Теперь отъ случая однородной деформаціи перейдемъ къ случаю перемѣнной деформаціи, при соблюденіи того условія, что для каждаго элемента боковыя силы

$$Q, \ R$$

равны нулю. Для этого нужно примѣнить къ каждому элементу тѣла то, что мы говорили про однородную деформацію. Окончательно получимъ слѣдующее правило:

Нужно къ числу внѣшнихъ силъ прибавить *для каждаго элемента* продольныя растягивающія фиктивныя силы

$$E\alpha t \text{ на ед. площади,}$$

и для полученной совокупности силъ рѣшить вопросъ, т. е. найти деформаціи и внутреннія силы. Полученныя деформаціи будутъ истинныя. Что касается найденныхъ продольныхъ внутреннихъ растягивающихъ силъ, то изъ нихъ нужно вычесть величину

$$E\alpha t;$$

разность дастъ истинныя напряженія.

7. Для скорѣйшаго пользованія этимъ правиломъ раздѣлимъ всѣ задачи относительно прямыхъ брусковъ на слѣдующіе два вида.

А. *Нагрѣваніе одно и тоже по всей массѣ тѣла.* Тогда къ каждому элементу тѣла нужно будетъ приложить фиктивныя силы

$$E\omega\alpha t$$

(ω —площадь сѣченія элемента). Очевидно для каждой точки внутри тѣла получатся *отъ двухъ смежныхъ элементовъ*, двѣ равныя и прямо противуположныя силы, которыя взаимно уравновѣсятся (фиг. 91). При этомъ изъ всей совокупности фиктивныхъ внѣшнихъ силъ придется принимать во вниманіе только тѣ изъ нихъ, которыя приходятся *на концахъ* тѣла.

В. *Нагрѣваніе не одинаково въ разныхъ точкахъ тѣла.* Тогда мы должны считать, что температура t не одинакова по всей массѣ тѣла, и для двухъ смежныхъ элементовъ тѣла есть безконечно малая разность температуръ

$$\partial t.$$

Приложимъ къ каждому элементу фиктивную растягивающую силу

$$E\omega\alpha t.$$

Теперь въ любой внутренней точкѣ тѣла не произойдетъ полнаго уравновѣшенія фиктивныхъ силъ для *двухъ смежныхъ элементовъ*, а получится остаточная разность силъ

$$E\omega\alpha\partial t.$$

Поэтому полная совокупность фиктивныхъ внѣшнихъ силъ будетъ состоять, не только изъ силъ

$$E\omega\alpha t \text{ (фиг. 92)},$$

приложенныхъ по концамъ тѣла, но еще изъ элементарныхъ силъ

$$E\omega\alpha\partial t,$$

дѣйствующихъ внутри тѣла.

8. Примѣръ. Призматическій брусокъ упертъ концами въ неподвижныя стѣны (фиг. 93). Найти распоръ X, который получится отъ нагрѣванія бруска, когда назначено, что полученное повышеніе температуры отъ лѣваго конца къ правому равномѣрно увеличивается отъ T_1 до T_2.

Здѣсь, кромѣ фиктивныхъ растягивающихъ силъ

$$E\omega\alpha T_1 \text{ и } E\omega\alpha T_2$$

приложенныхъ по концамъ бруска (фиг. 94) нужно ввести внутри бруска для каждаго элемента длиною ∂x, еще добавочныя растягивающія силы

$$E\omega\alpha\partial t.$$

Присоединимъ къ этимъ силамъ искомый распоръ X и выразимъ, что отъ совокупности всѣхъ силъ полная длина бруска не должна измѣниться. Это дастъ намъ уравненіе для опредѣленія силы X.

Разсматривая силы, начиная съ лѣваго конца, видимъ, что во-первыхъ брусокъ по всей своей длинѣ растягивается силой

$$Q = E\omega\alpha T_1 - X$$

и получаетъ удлиненіе

$$\delta_1 = \frac{Ql}{E\omega} = l \,.\, \alpha T_1 - \frac{Xl}{E\omega}$$

Затѣмъ элементъ длины ∂x, находящійся на разстояніи x отъ лѣваго конца, растягивается еще всей совокупностью элементарныхъ силъ

$$E\omega\alpha\partial t,$$

лежащихъ лѣвѣе его, т. е. суммою

$$q = \int_0^x E\omega\alpha\partial t.$$

Такъ какъ температура по заданію увеличивается равномѣрно отъ лѣваго конца къ правому, то на разстояніи x она будетъ имѣть величину

$$t = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \frac{x}{l}$$

Слѣдовательно

$$\partial t = \frac{(T_2 - T_1)}{l} \cdot \partial x$$

Подставляя это въ выраженіе для q и интегрируя, получимъ

$$q = E\omega\alpha \cdot \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot x$$

Удлиненіе элемента ∂x отъ этой силы будетъ

$$\frac{q \,.\, \partial x}{E\omega} = \alpha \cdot \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot x \,.\, \partial x.$$

А сумма такихъ удлиненій всѣхъ элементовъ по всей длинѣ бруска дастъ полное удлиненіе:

$$\delta_2 = \int_0^l \alpha . \frac{T_2 - T_1}{l} x . dx = \alpha (T_2 - T_1) \cdot \frac{l}{2}$$

Складывая удлиненія δ_1 и δ_2, должны въ суммѣ получить нуль. Слѣдовательно

$$l \alpha T_1 + \alpha (T_2 - T_1) \frac{l}{2} - \frac{Xl}{E\omega} = 0$$

Откуда

$$X = E\omega\alpha \cdot \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

9. Второй примѣръ. Прямой брусокъ; по длинѣ его температура не мѣняется, но въ разныхъ точкахъ поперечнаго сѣченія она различная и измѣняется по закону

$$t = a + bx + cy$$

гдѣ x, y—координаты отнесенныя къ главнымъ осямъ сѣченія (фиг. 95). Найти внутреннія напряженія, вызываемыя такимъ неравномѣрнымъ нагрѣваніемъ.

Такъ какъ по длинѣ температура не мѣняется, то фиктивныя силы приводятся къ растягивающимъ

$$p = E\omega\alpha t = E\omega\alpha (a + bx + cy),$$

приложеннымъ по концамъ бруска.

Совокупность такихъ силъ, дѣйствующихъ на одномъ концѣ, приводится къ одной силѣ равной суммѣ всѣхъ p:

$$Q = \Sigma p,$$

и къ двумъ парамъ: первой—ось которой есть ось X, и моментъ равенъ

$$M_1 = \Sigma py;$$

и второй, для которой осью служитъ линія

$$OY,$$

и моментъ равенъ

$$M_2 = \Sigma px.$$

При нахожденіи величинъ этихъ силъ нужно помнить, что такъ какъ начало координатъ взято въ центрѣ тяжести сѣченія, то

$$\Sigma\omega x = 0$$

$$\Sigma\omega y = 0$$

Вслѣдствіе того, что оси X и Y—главныя, имѣемъ условіе:

$$\Sigma\omega xy = 0$$

Пользуясь этими выраженіями получимъ:

$$Q = E\alpha \,.\, a\Sigma\omega = Ea \,.\, a \,.\, \Omega$$

гдѣ Ω—вся площадь сѣченія Далѣе найдемъ:

$$M_1 = E\alpha c\Sigma\omega y^2 = E\alpha cI_1$$

гдѣ I_1—моментъ инерціи сѣченія относительно оси X. Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$M_2 = E\alpha \,.\, b\Sigma\omega y^2 = E\alpha \,.\, bI_2$$

гдѣ I_2—моментъ инерціи сѣченія относительно оси Y.

Выберемъ въ сѣченіи какой нибудь элементъ ω, имѣющій координаты

$$x_1,\ y_1$$

и найдемъ напряженіе, вызываемое въ немъ полученными фиктивными силами. Оно будетъ состоять изъ трехъ членовъ:

1) отъ силы Q

$$+\frac{Q}{\Omega} = E\alpha \,.\, a$$

2) отъ момента M_1:

$$+\frac{M_1\, y_1}{I_1} = E\alpha \,.\, cy$$

3) Отъ момента M_2:

$$+\frac{M_2\, x_1}{I_2} = E\alpha \,.\, bx_1$$

Въ суммѣ получается фиктивное напряженіе

$$E\alpha\,(a + bx_1 + cy_1).$$

Для полученія истиннаго напряженія нужно отсюда вычесть величину:

$$E\alpha t;$$

но такъ какъ температура разсматриваемаго элемента равна

$$a + bx_1 + cy_1$$

то въ результатѣ получимъ нуль.

И такъ предположенное нами распредѣленіе температуры, т. е. такое когда температура выражается линейной функціей координатъ x, y, не вызываетъ никакихъ напряженій въ брускѣ.

ПРИЛОЖЕНІЕ II.

Теорема Мориса Леви относительно сравнительнаго вѣса фермъ имѣющихъ лишніе бруски и системъ статически опредѣлимыхъ.

---

1. Эта теорема была найдена М. Леви еще въ 1873 году [1]). Разсматривая системы, въ которыхъ нѣтъ изгиба, онъ пришелъ къ слѣдующимъ общимъ заключеніямъ:

a) Фермы съ лишними линіями только въ исключительныхъ случаяхъ могутъ быть сдѣланы тѣлами равнаго сопротивленія, т. е. такими, что напряженія во всѣхъ ихъ брускахъ одинаковы (на ед. площади).

Между тѣмъ статически опредѣлимая система всегда можетъ быть сдѣлана системой равнаго сопротивленія.

b) *При назначенной величинѣ наибольшаго напряженія* матеріала, вѣсъ статически опредѣлимой фермы получается, вообще говоря, меньше чѣмъ вѣсъ фермы съ лишними брусками. Въ частныхъ случаяхъ, когда ферму съ лишними линіями удается сдѣлать формой равнаго сопротивленія, вѣсъ ея будетъ одинаковъ съ вѣсомъ статически опредѣлимой системы.

2. Эти выводы сдѣланы М. Леви въ предположеніи, что *безопасныя напряженія одинаковы для растяженія и сжатія*. Притомъ въ указанныхъ теоремахъ говорится о *теоретическомъ вѣсѣ*, т. е. предполагается, что поперечное сѣченіе брусковъ одинаково по всей длинѣ, и совершенно пренебрегаются всѣ соединенія, стыки, накладки, дополнительныя части для усиленія жесткости и т. д.

---

[1]) Мемуаръ М. Леви былъ представленъ Парижской Академіи въ 1873 году. См. прибавленіе къ первому изданію его Графической Статики. M. Lèvy. La Statique graphique. 1874.

Дѣйствительный вѣсъ будетъ значительно отличаться отъ теоретическаго. Всѣ сжатыя части придется усилить, сообразно такъ называемому коеффиціенту длины, т. е. руководствуясь формулой Эйлера. Соединенія, накладки и проч. тоже составляютъ значительную прибавку къ вѣсу. Вслѣдствіе этого оказывается, что истинный вѣсъ мостовыхъ фермъ болѣе теоретическаго отъ 1,5 разъ (для большихъ пролетовъ) до 2 и болѣе разъ (для малыхъ пролетовъ). Вообще отношеніе между этими двумя вѣсами, даже при одномъ и томъ же пролетѣ, не получается одинаковымъ, и зависитъ отъ конструкціи моста.

Поэтому нельзя считать выводы М. Леви безусловно справедливыми. Въ такомъ сложномъ практическомъ вопросѣ множество обстоятельствъ оказываютъ вліяніе, и препятствуютъ дѣйствію общихъ выводовъ. Тѣмъ не менѣе теорема М. Леви очень любопытна и поучительна, какъ нѣкоторое приблизительное, общее указаніе на основныя черты и условія вопроса.

Имѣя возможность вывести теорему Леви весьма простымъ и скорымъ путемъ, мы изложимъ ее здѣсь.

3. Безъ сомнѣнія статически опредѣлимая ферма всегда можетъ быть сдѣлана системой равнаго сопротивленія. Распредѣленіе растягивающихъ и сжимающихъ силъ на бруски такой фермы вычисляется по геометрическому ея чертежу, и независитъ отъ поперечныхъ сѣченій брусковъ. Когда указанныя силы найдены, то можно будетъ для каждаго бруска подобрать такое сѣченіе, чтобы вездѣ было одно и тоже напряженіе.

Иначе обстоитъ дѣло если ферма имѣетъ лишнія линіи. Здѣсь распредѣленіе силъ по брускамъ зависитъ отъ поперечныхъ сѣченій всѣхъ этихъ брусковъ. Посмотримъ можно ли и здѣсь получить одинаковыя напряженія для всѣхъ частей?

4. Для этого воспользуемся началомъ наименьшей работы. Пусть силы, дѣйствующія на лишнихъ брускахъ будутъ

$$X,\ Y,\ Z\ .\ .\ .\ .\ ;$$

тѣ силы, которыя придутся на необходимые бруски, обозначимъ общей буквой T. Потенціальная энергія будетъ имѣть форму:

$$V = \Sigma \frac{T^2 . l}{2E\omega} + \frac{X^2 . L}{2E\Omega} + \frac{Y^2 . L'}{2E\Omega'} + \dots .$$

Полагая

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0\ .\ .\ .\ .$$

получимъ рядъ уравненій:

$$\sum \frac{T\,.\,l}{E\omega} \cdot \frac{\partial T}{\partial X} + \frac{X\,.\,L}{E\Omega} = 0$$

$$\sum \frac{T\,.\,l}{E\omega} \cdot \frac{\partial T}{\partial Y} + \frac{Y\,.\,L}{E\Omega'} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Мы желаемъ, чтобы во всѣхъ брускахъ были одинаковыя напряженія, т. е. чтобы было:

всѣ $\frac{T}{\omega}$ равны между собою и равны величинамъ

$$\frac{X}{\Omega},\ \frac{Y}{\Omega'}\ \cdots$$

Сокращая наши уравненія на эти постоянныя величины, получаемъ условія:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma l \frac{\partial T}{\partial X} + L = 0 \\ &\Sigma l \frac{\partial T}{\partial Y} + L' = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\ (A).$$

Но величины

$$\frac{\partial T}{\partial X},\ \cdots$$

представляютъ коеффиціенты, вполнѣ опредѣляемые геометрическимъ чертежемъ фермы, и отъ насъ независящіе. На самомъ дѣлѣ это будутъ растягивающія или сжимающія силы, которыя передадутся на необходимыя бруски при нагрузкѣ

$$X = 1,$$

полагая всѣ прочія нагрузки нулями.

Подобно этому

$$\frac{\partial T}{\partial Y}$$

представляютъ силы растягивающія необходимые бруски, при нагрузкѣ

$$Y = 1$$

и тоже вполнѣ опредѣляются заданіемъ геометрическаго чертежа фермы.

Изъ этого мы видимъ, что всѣ величины, входящія въ условныя уравненія (A), отъ насъ независятъ; и заданы напередъ чертежемъ фермы. Мы не имѣемъ въ нашемъ распоряженіи никакихъ средствъ, чтобы достигнуть выполненія этихъ условій. Конечно въ большинствѣ случаевъ они не будутъ удовлетворяться, и выполненіе ихъ представится только въ рѣдкихъ, исключительныхъ случаяхъ.

И такъ ферма съ лишними линіями можетъ быть сдѣлана тѣломъ равнаго сопротивленія только въ исключительныхъ случаяхъ.

Характеръ такихъ исключительныхъ случаевъ можно представить себѣ слѣдующимъ образомъ: вообразимъ себѣ систему статически опредѣлимую; назначимъ одинаковое напряженіе для всѣхъ ея брусковъ и представимъ себѣ измѣненіе формы, происходящее при этомъ. Оно будетъ состоять въ томъ, что всѣ бруски получать одинаковое относительное удлиненіе или сжатіе.

Положимъ теперь что намъ удается провести въ фермѣ, между ея узлами, такую линію, которая получаетъ одинаковое съ необходимыми брусками удлиненіе или сжатіе.

Если это удалось, то *вѣроятно* можно получить систему съ лишнимъ брускомъ, имѣющую характеръ тѣла равнаго сопротивленія. Для полученія въ этомъ *достовѣрнаго* убѣжденія нужно еще сдѣлать провѣрку. Нужно назначить нѣкоторую пробную величину для натяженія лишняго бруска, прибавить эту силу къ нагрузкамъ и посмотрѣть: сохраняють ли свои знаки всѣ напряженія необходимыхъ брусковъ, т. е. растянутые остаются растянутыми, а сжатые—сжатыми. Если знакъ сохраняется, то мы получили возможную систему съ лишней линіей, имѣющую одинаковыя напряженія во всѣхъ своихъ частяхъ.

5. Сравненіе вѣса системъ: *a)* **статически опредѣлимой и** *b)* **имѣющей лишніе бруски.** Это сравненіе мы дѣлаемъ при одинаковыхъ нагрузкахъ, одинаковомъ расположеніи опоръ и одинаковомъ предѣлѣ для безопасныхъ напряженій. Но этихъ условій еще недостаточно для опредѣленности сравненія. Задавая ихъ мы можемъ построить множество системъ разной формы и разнаго вѣса. Нельзя утверждать, что *каждая* изъ такихъ статически опредѣлимыхъ фермъ будетъ легче *каждой* системы съ лишними линіями.

По этому введемъ еще условіе. Самое подходящее для нашей цѣли будетъ назначить, что обѣ сравниваемыя системы имѣютъ одинаковую степень жесткости, т. е. измѣняемости формы. Опредѣленная степень жесткости очень важна, въ особенности для мостовыхъ фермъ. При недостаткѣ жесткости будутъ получаться сильныя качанія во время прохожденія по мосту подвижнаго груза.

За мѣру жесткости нужно принять величину перемѣщеній тѣхъ узловъ, къ которымъ приложены нагрузки. (Подъ именемъ перемѣщенія мы подразумѣваемъ здѣсь *проекцію* его на направленіе нагрузки). И такъ можно сравнивать двѣ фермы, имѣющія одинаковыя перемѣщенія нагруженныхъ узловъ. Но такъ какъ нагрузки у нихъ одинаковы, то и работа нагрузокъ, производимая ими, при измѣненіи формы, отъ естественнаго состоянія до равновѣсія въ напряженномъ состояніи, будетъ одинакова. Въ виду этого обобщимъ вопросъ и будемъ сравнивать двѣ фермы при условіи, что сумма работъ нагрузокъ при измѣненіи формы, отъ естественнаго состоянія до напряженнаго равновѣсія, одинакова для обѣихъ фермъ.

Но если работа нагрузокъ одинакова, то и потенціальная энергія обѣихъ фермъ, тоже одинакова.

Положимъ наша статически опредѣлимая ферма сдѣлана системой равнаго сопротивленія, и во всѣхъ частяхъ ея допущено натяженіе T кил. на. кв. сантиметръ. Потенціальная энергія каждой части получится умножая.

$$\frac{T^2}{2E}$$

на объемъ этой части. А энергія всей фермы V_1, найдется, умножая указанное выраженіе на сумму объемовъ W_1 всѣхъ частей. Получится

$$V_1 = \frac{T^2}{2E} \cdot W_1$$

Обратимся теперь къ фермѣ съ лишними частями. Положимъ намъ не удалось сдѣлать ее тѣломъ равнаго сопротивленія, и напряженія въ частяхъ ея (t) неодинаковы; при томъ нѣкоторыя меньше T, остальныя равны T. Энергія одного изъ брусковъ выразится черезъ

$$\frac{t^2}{2E} \cdot W$$

(W—объемъ бруска); а энергія всей системы будетъ сумма:

$$V_2 = \Sigma \frac{t^2}{2E} W$$

Если въ этой формулѣ всѣ t замѣнимъ наибольшей ихъ величиной T, то значеніе второй части ея увеличится и результатъ этой подстановки, т. е.

$$\frac{T^2}{2E} \cdot \Sigma w$$

(ΣW—сумма объемовъ всѣхъ брусковъ) будетъ больше V_2, а слѣд. и больше равной ей величины V_1. Отсюда заключаемъ, что

$$\Sigma w > W_1$$

т. е. объемъ, а слѣд. и вѣсъ, системы съ лишними линіями больше чѣмъ статически опредѣлимой системы.

Но возьмемъ другой случай; положимъ намъ удалось сдѣлать нашу систему съ лишними линіями тѣломъ равнаго сопротивленія, и во всѣхъ частяхъ ея получается напряженіе T. Тогда ея потенціальная энергія будетъ

$$V_2 = \frac{T^2}{2E} \cdot \Sigma w.$$

Уравненіе ее V_1, находимъ

$$\Sigma w = W_1$$

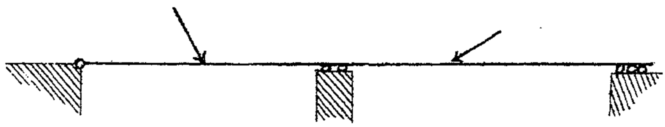
т. е. въ этомъ случаѣ вѣсъ системы съ лишними брусками будетъ равенъ вѣсу статически опредѣлимой фермы.

И такъ системы съ лишними линіями или оказываются тяжелѣе статически опредѣлимыхъ, или, въ частныхъ, исключительныхъ случаяхъ, имѣютъ вѣсъ одинаковый съ тѣми.

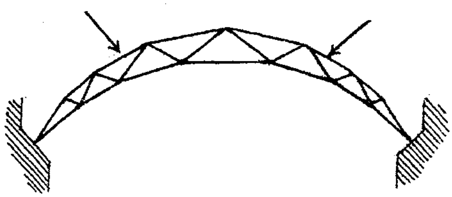
6770.

Фиг. 1.

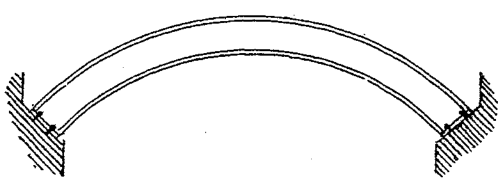
Фиг. 2.



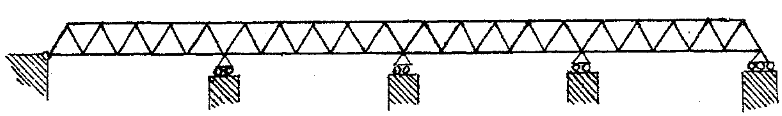
Фиг. 3.



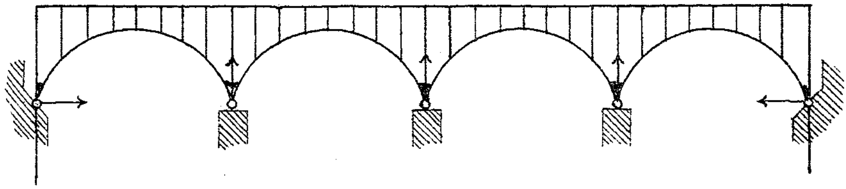
Фиг. 4.



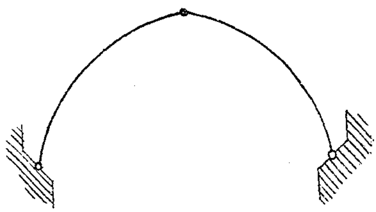
Фиг. 5.



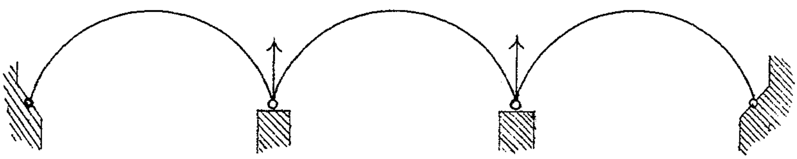
Фиг. 6.



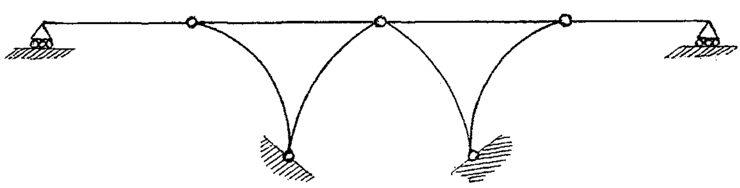
Фиг. 7.



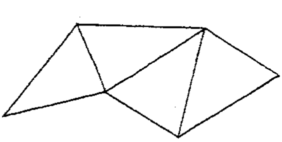
Фиг. 8.



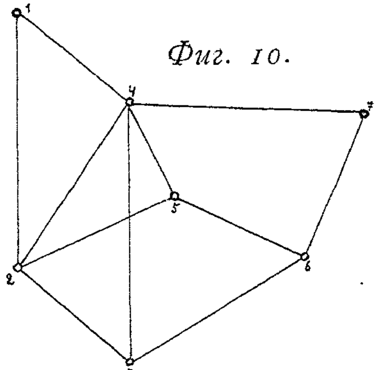
Фиг. 8.bis



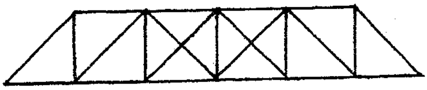
Фиг. 9.



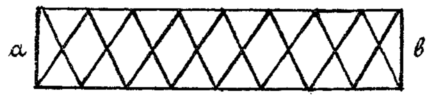
Фиг. 10.



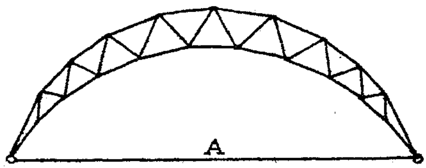
Фиг. 11.



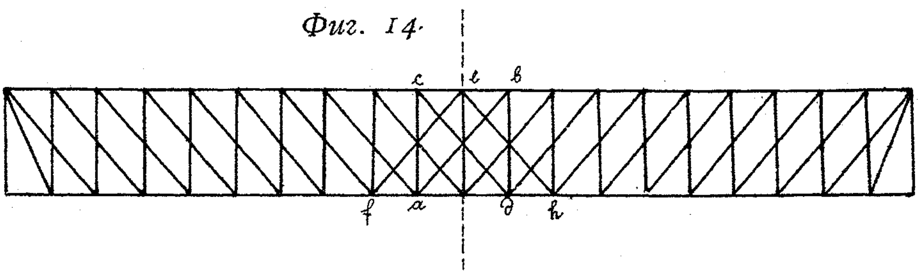
Фиг. 12.



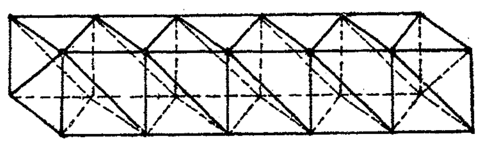
Фиг. 13.



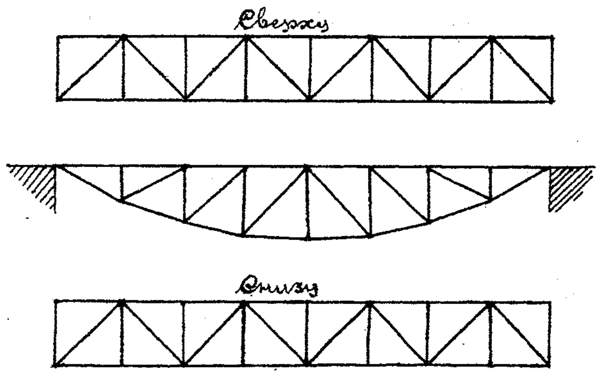
Фиг. 14.



Фиг. 15.

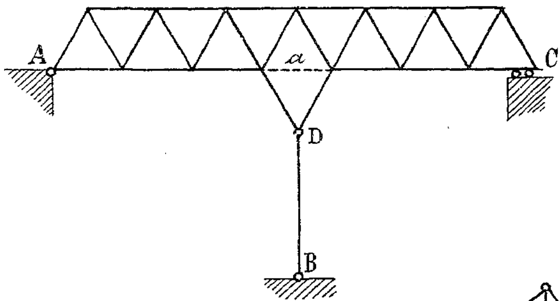


Фиг 15 bis.

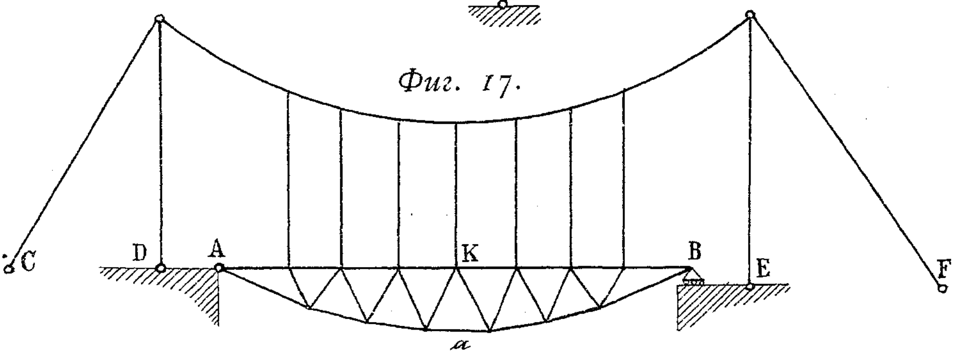


IV.

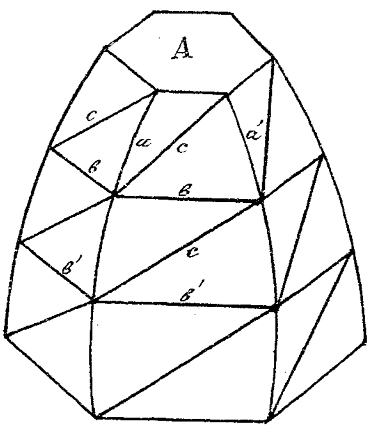
Фиг. 16.



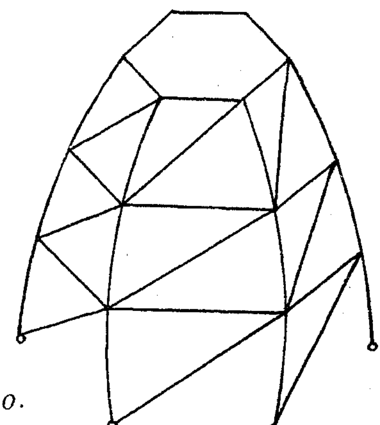
Фиг. 17.



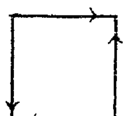
Фиг 18.



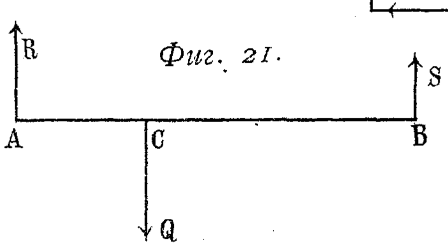
Фиг. 19.



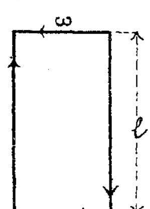
Фиг. 20.



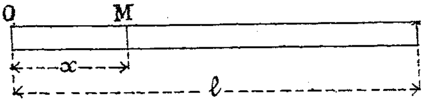
Фиг. 21.



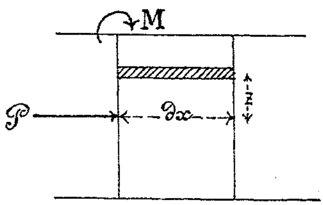
Фиг. 22.



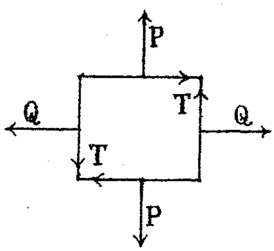
Фиг. 23.



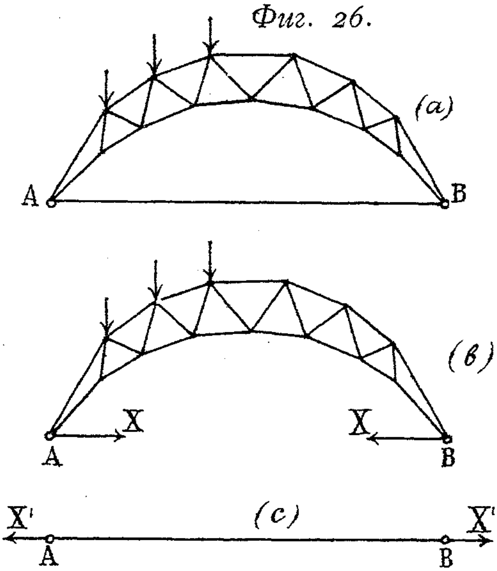
Фиг. 24.



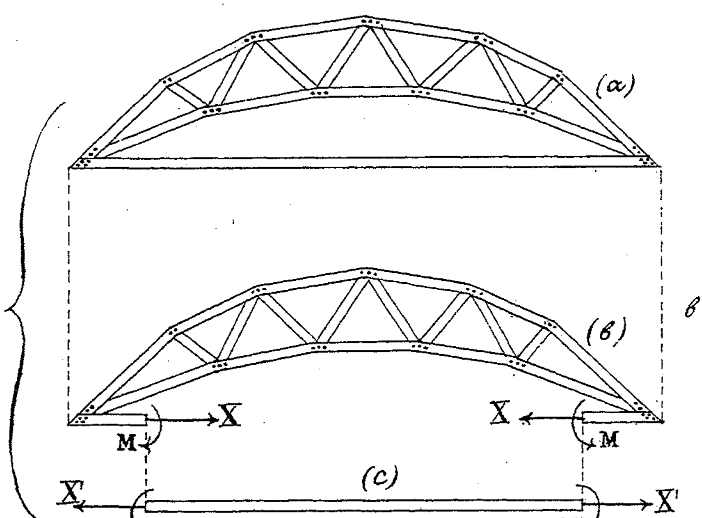
Фиг. 25.



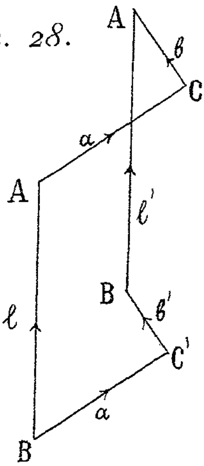
Фиг. 26.



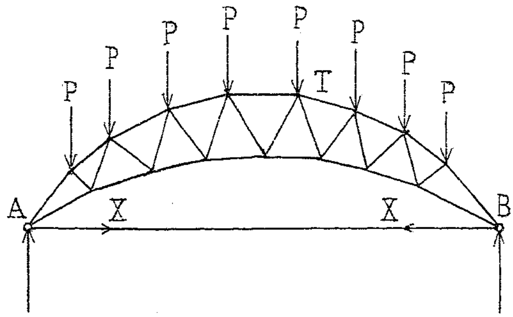
Фиг. 27.



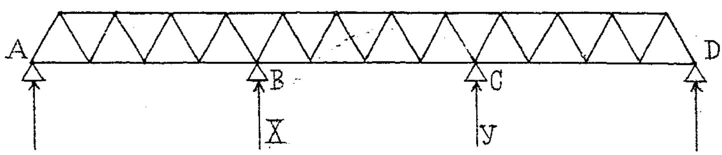
Фиг. 28.



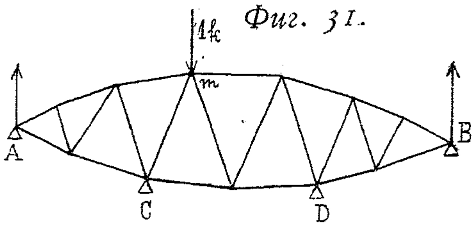
Фиг. 29.



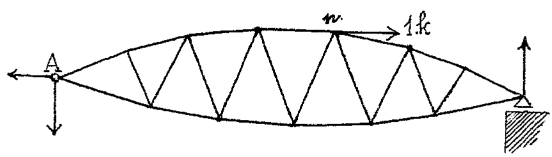
Фиг. 30.



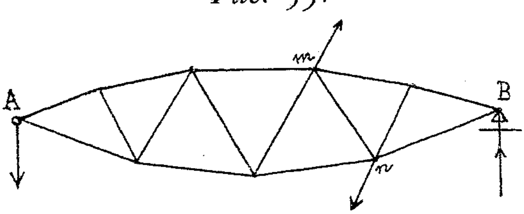
Фиг. 31.



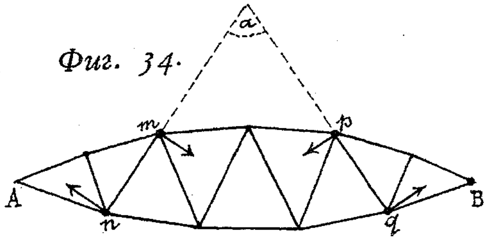
Фиг. 32.



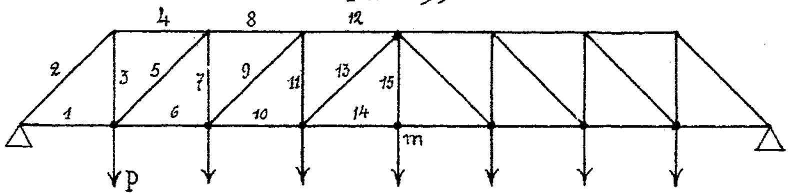
Фиг. 33.



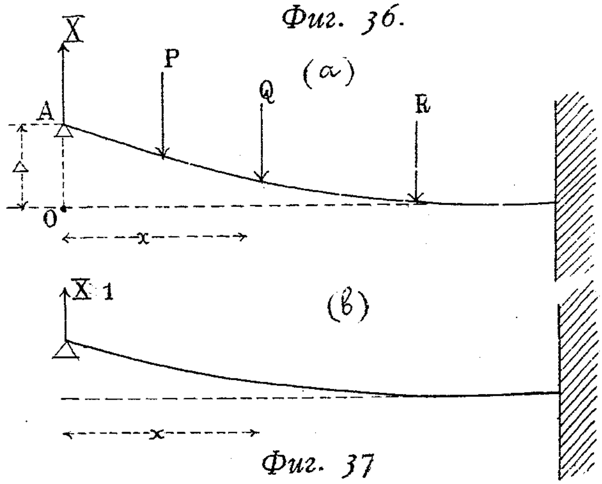
Фиг. 34.



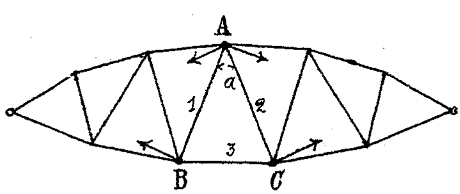
Фиг. 35.



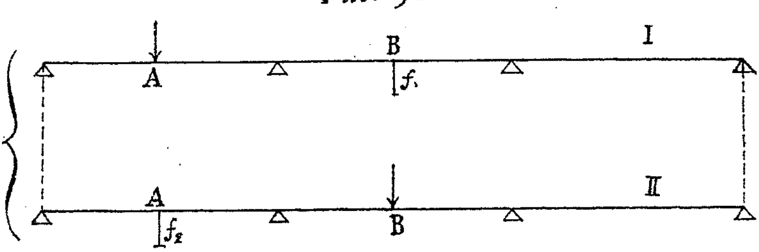
Фиг. 36.



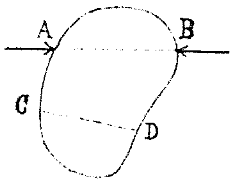
Фиг. 37



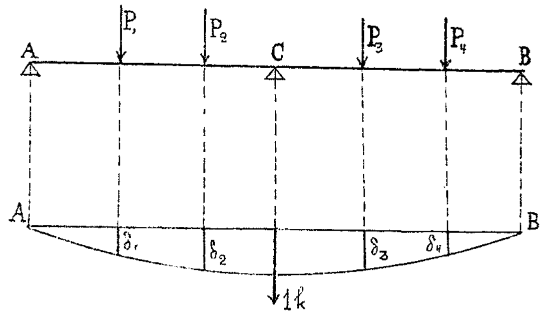
Фиг. 38.



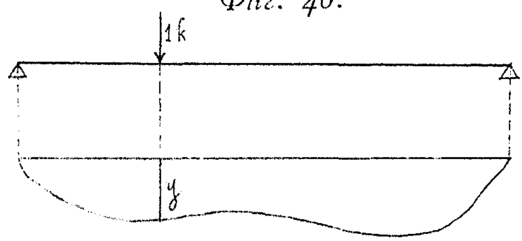
Фиг. 38. bis



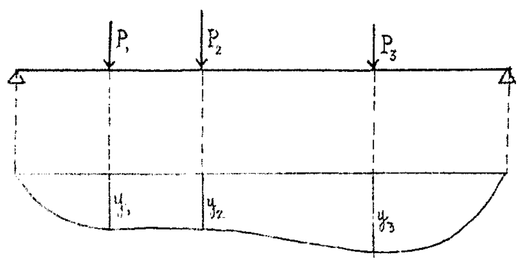
Фиг. 39.



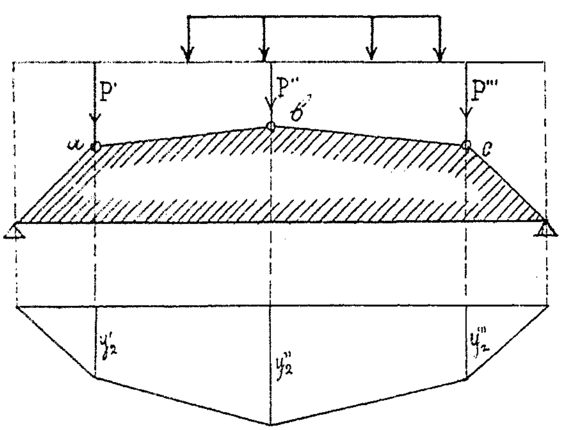
Фиг. 40.



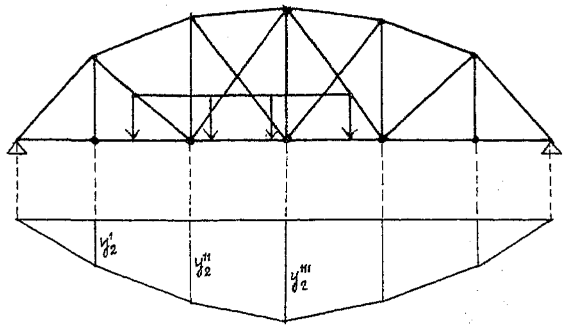
Фиг. 41.



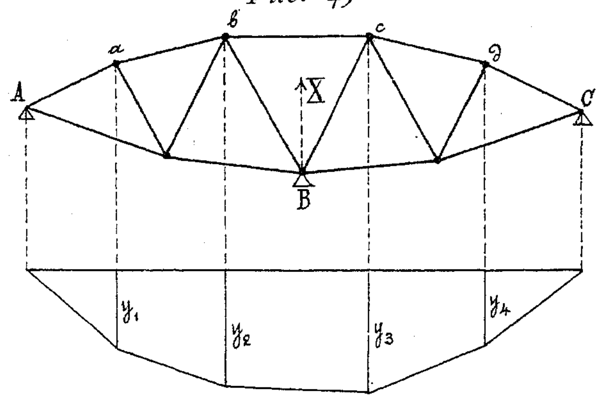
Фиг. 42.



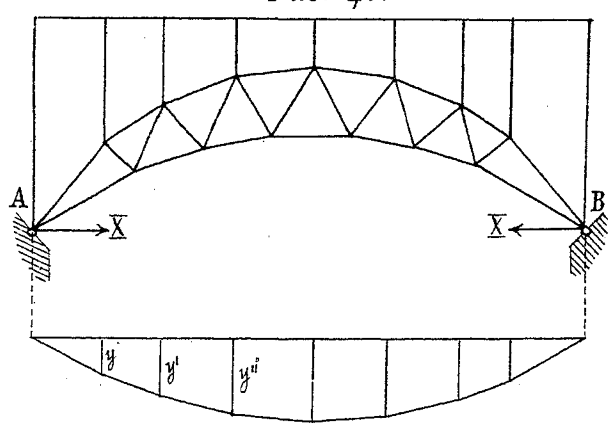
Фиг. 43.



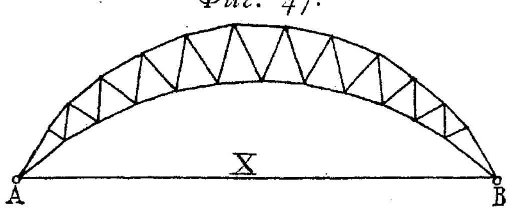
Фиг. 45.



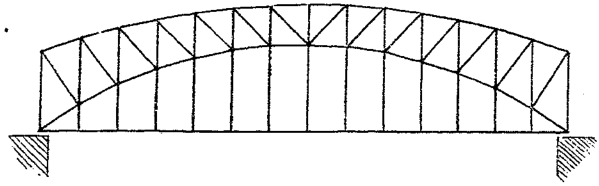
Фиг. 46.



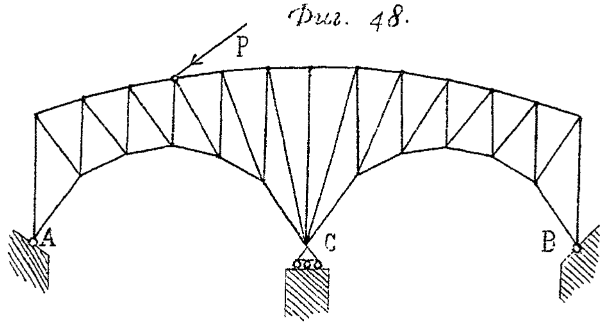
Фиг. 47.



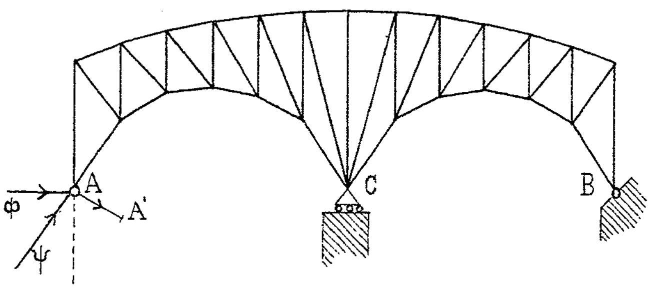
Фиг. 47 bis



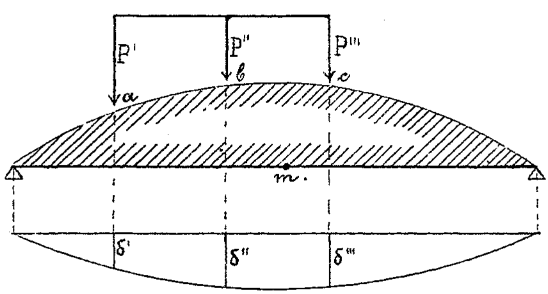
Фиг. 48.



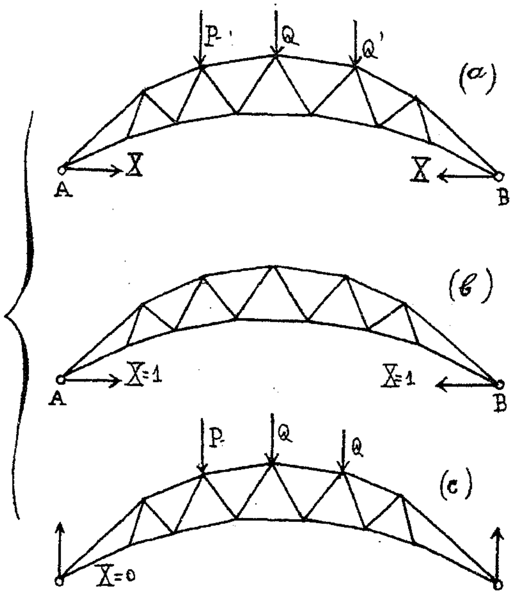
Фиг. 48. б



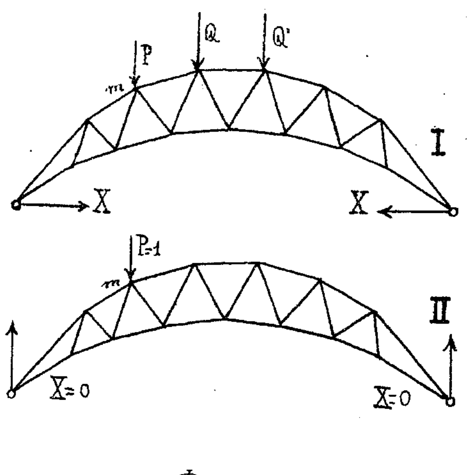
Фиг. 49.



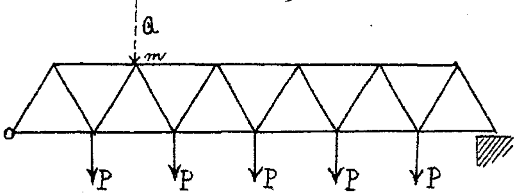
Фиг. 50.



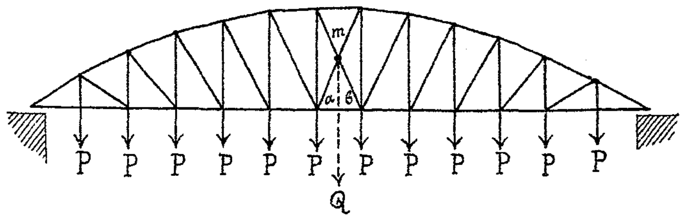
Фиг. 51.



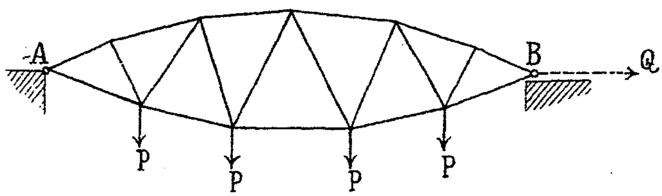
Фиг. 52.



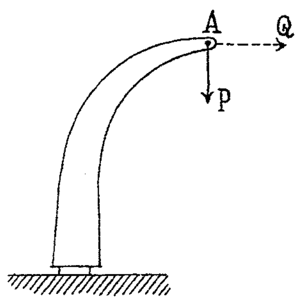
Фиг. 53.



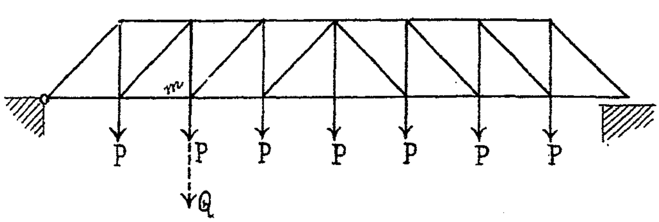
Фиг. 54.

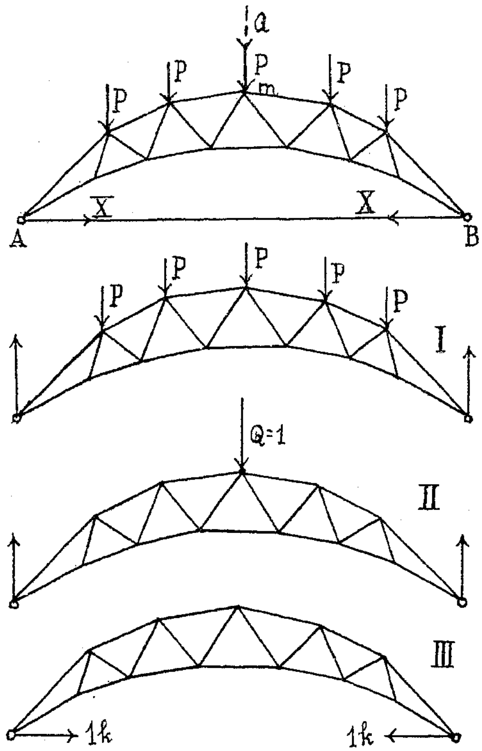


Фиг. 55.



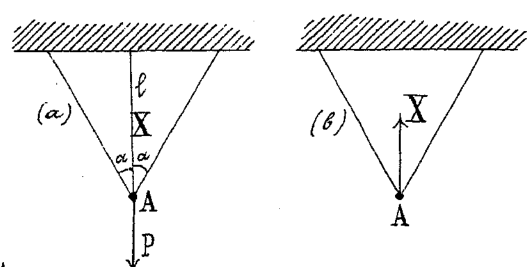
Фиг. 56.

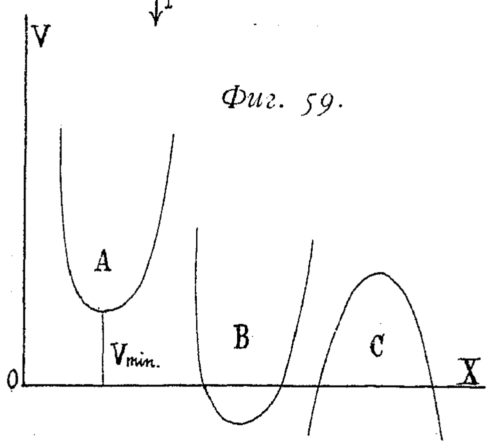




Фиг. 57.

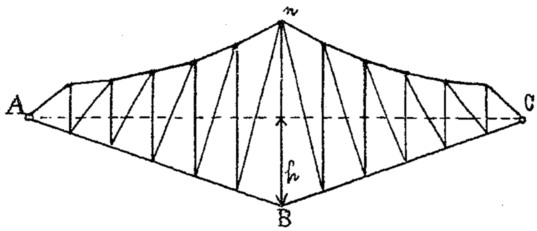
Фиг. 58.



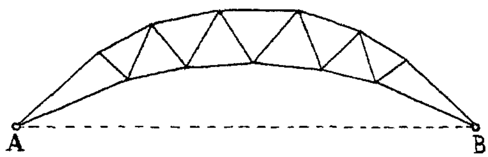


Фиг. 59.

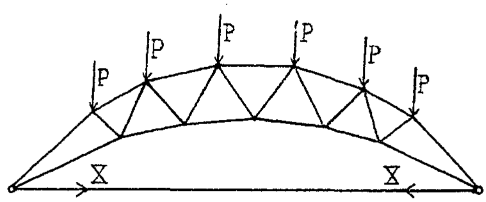
Фиг. 60.



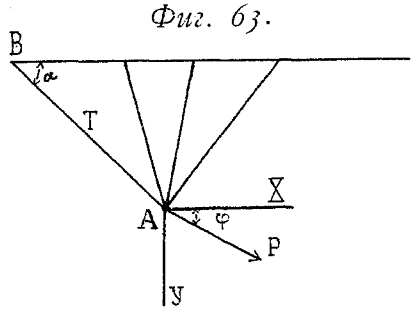
Фиг. 61.



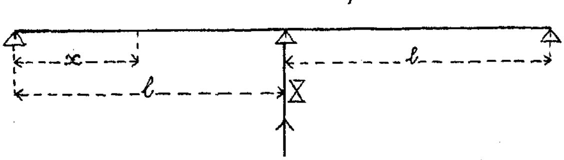
Фиг. 62.



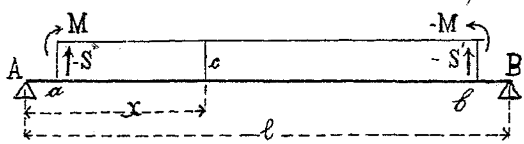
Фиг. 63.



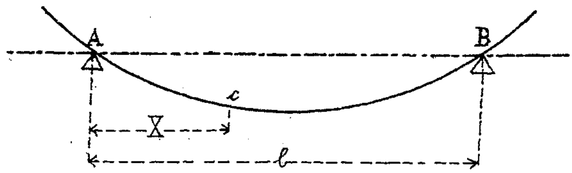
Фиг. 64.



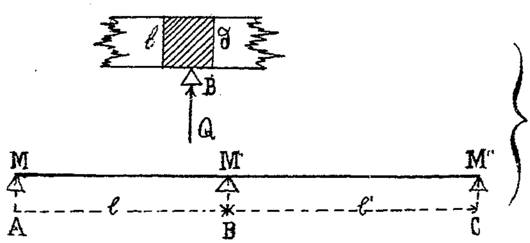
Фиг. 65.



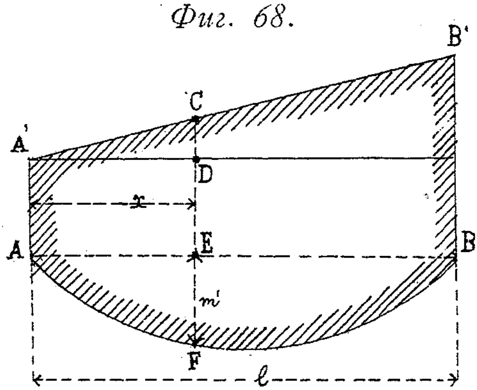
Фиг. 66.

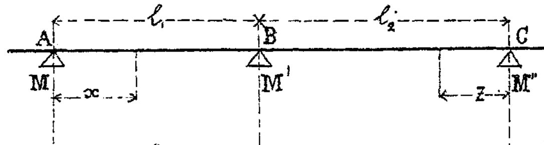


Фиг. 67.

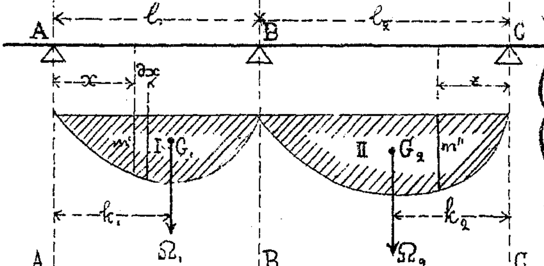


Фиг. 68.

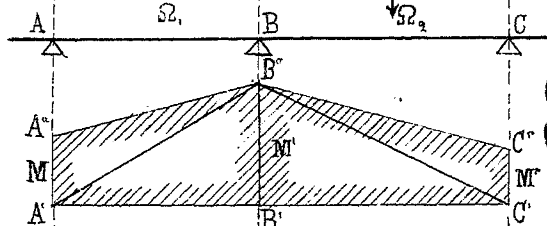




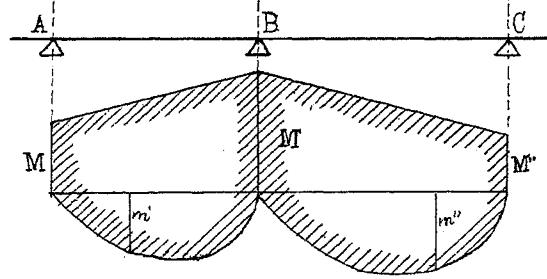
Фиг. 69.



Фиг. 70.

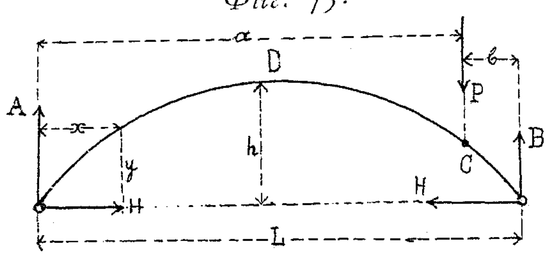


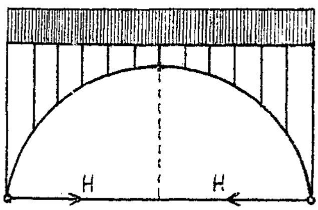
Фиг. 71.



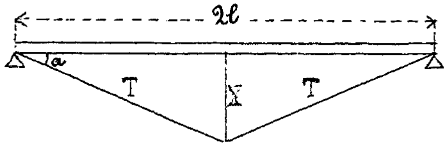
Фиг. 72.

Фиг. 73.

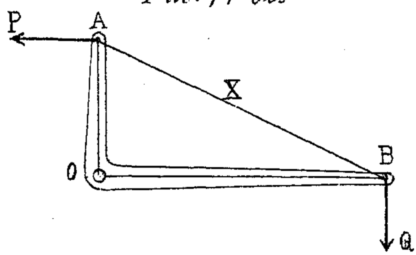




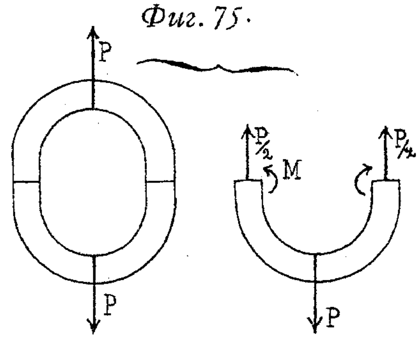
Фиг. 73 bis



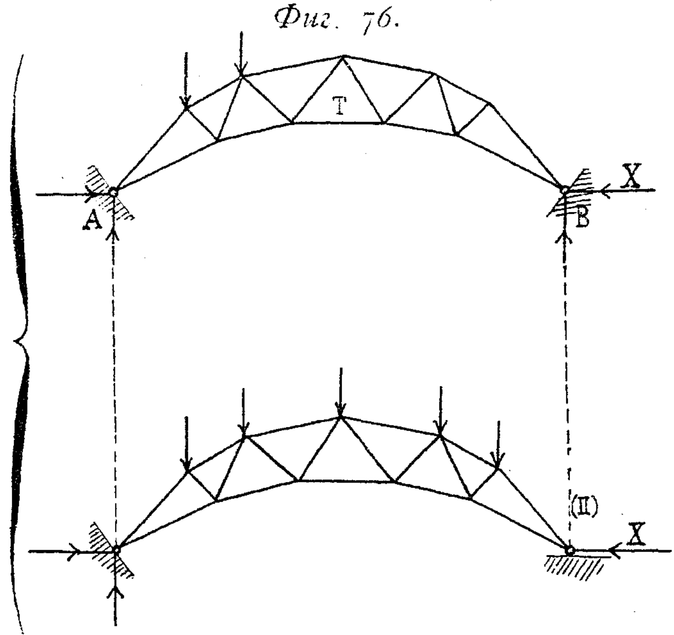
Фиг. 74.



Фиг. 74 bis

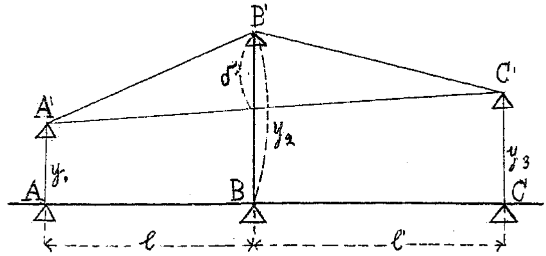


Фиг. 75.

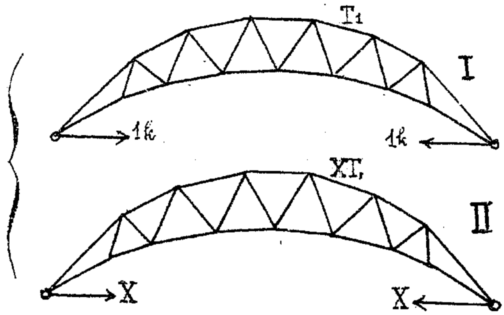


Фиг. 76.

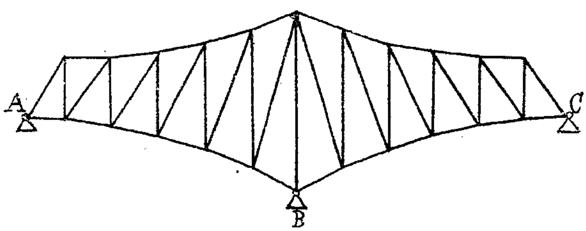
Фиг. 76 bis



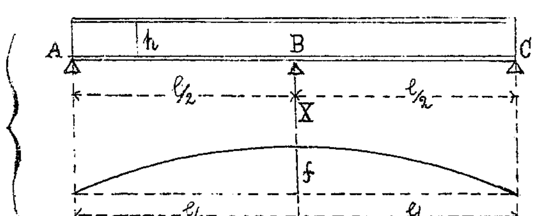
Фиг. 77.



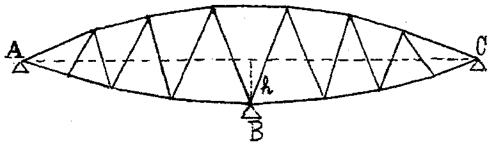
Фиг. 78.



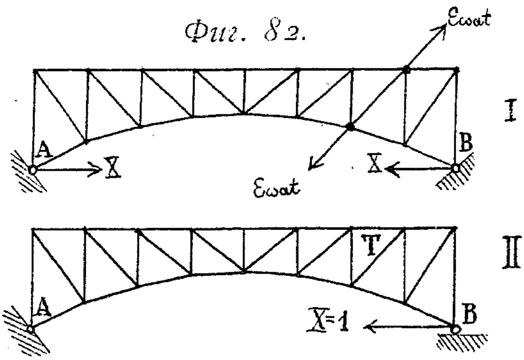
Фиг. 79.



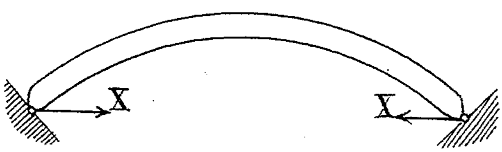
Фиг. 80.



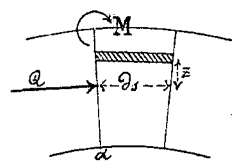
Фиг. 82.



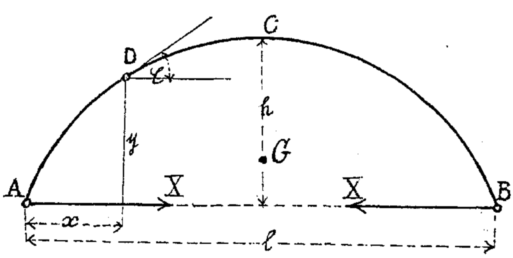
Фиг. 83.



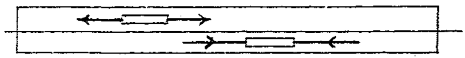
Фиг. 84.



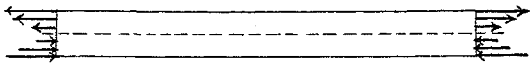
Фиг. 85.



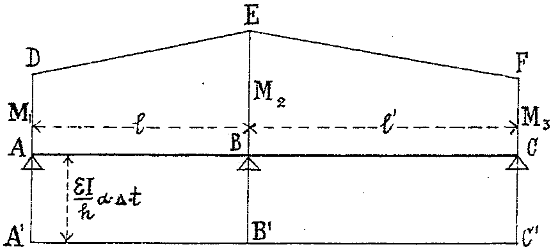
Фиг. 86.



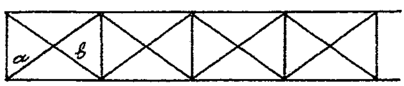
Фиг. 86. bis



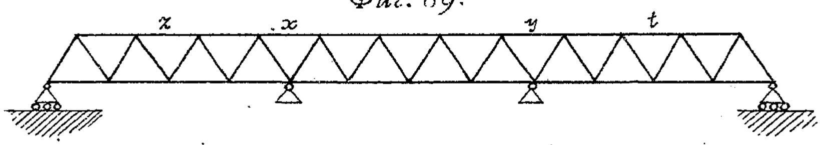
Фиг. 87.



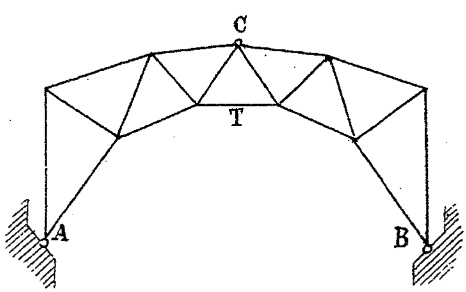
Фиг. 88.



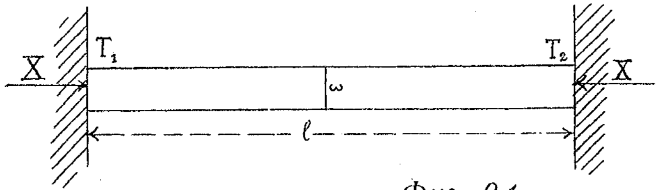
Фиг. 89.



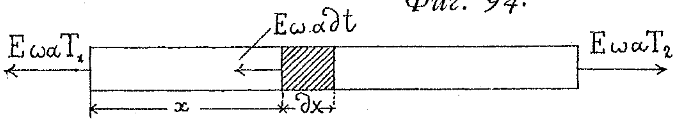
Фиг. 90.



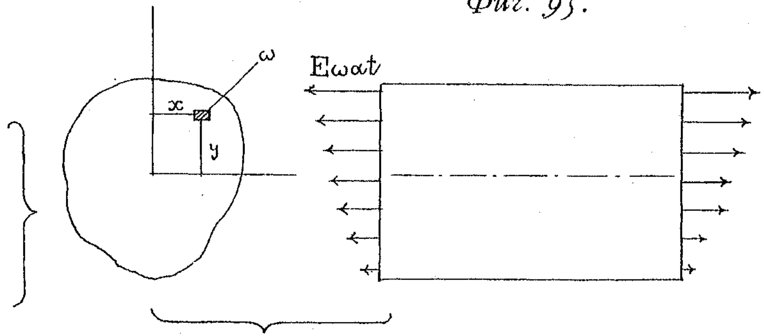
Фиг. 93.



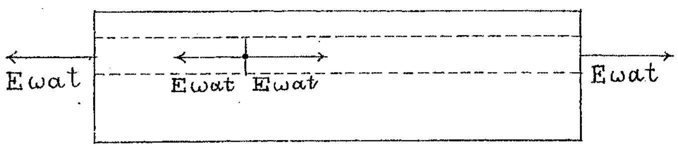
Фиг. 94.



Фиг. 95.



Фиг. 91.



Фиг. 92.